Kapitel 2

Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

2.1 Der Satz von Banach-Steinhaus

1.1 Satz (Banach-Steinhaus). *Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Vektorraum. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie beschränkter, linearer Abbildungen von X nach Y, die punktweise beschränkt sind, d.h. für alle $x \in X$ gilt:*

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\|_Y < \infty. \tag{1.2}$$

Dann sind die Operatornormen der A_i gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{L(X,Y)} < \infty. \tag{1.3}$$

• Die Linearität ist eine wichtige Voraussetzung , denn betrachte $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} |x|^2 & \text{für} |x| \leq n \\ n^2 & \text{für} |x| \geq n \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\sup\limits_n f_n(x) \leq K(x) < \infty$ und für $|x| < K$ ist $\sup_n |f_n(x)| \leq K^2$, also ist $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f_n(x)|}{|x|} = n$, aber $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} n = \infty$. Die Folge f_n ist also punktweise, aber nicht gleichmäßig beschränkt.

1.4 Satz (Baire). *Sei (X, d) ein nichtleerer, vollständiger metrischer Raum und seien $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abgeschlossene Mengen mit*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = X.$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int} A_{k_0} \neq \emptyset$.

Beweis : Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{int} A_k = \emptyset$. Für alle offenen, nichtleeren Mengen U und für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $U \setminus A_k$ offen, denn $U \setminus A_k = \underbrace{U}_{\text{offen}} \cap \underbrace{(X \setminus A_k)}_{\text{offen}}$ und nichtleer, denn sonst wäre $U = A_k \Rightarrow \operatorname{int} U = \operatorname{int} A_k = \emptyset \Rightarrow U = \emptyset$, ein Widerspruch.
Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein x, so dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq U \setminus A_k$ für $\varepsilon < \frac{1}{k}$. Induktiv konstruieren wir also Mengen

$$\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subseteq B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k \qquad \varepsilon_k < \frac{1}{k}.$$

Für alle $l \geq k$ ist $x_l \in B_{\varepsilon_k}(x_k)$, also ist (x_k) ist Cauchyfolge, denn für $n, l \geq k$ gilt:

$$d(x_n, x_l) \leq d(x_n, x_k) + d(x_k, x_l) < \frac{2}{k}$$

Da X vollständig ist, gibt es ein $x \in X$, gegen das die Folge (x_k) konvergiert. Für alle $l \geq k$ ist $x_l \in B_{\varepsilon_k}(x_k) \Rightarrow x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion ist $\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subseteq B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k$, also ist $A_k \cap \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} = \emptyset$. Da aber $x \in B_{\varepsilon_k}(x_k)$ ist $\forall\ k \in \mathbb{N}\ x \notin A_k$. Aber $x \in X = \bigcup A_k$, ein Widerspruch.

■

- Eine Menge M heißt <u>nirgends dicht</u> $\Leftrightarrow \operatorname{int} M = \emptyset$.

1.5 Folgerung. *Eine Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten abgeschlossenen Mengen A_k eines vollständigen metrischen Raumes kann nicht den ganzen Raum ergeben.*

Beweis : Negation der Behauptung von Satz 1.4. ■

Beweis (Satz 1.1): Wir betrachten Mengen der Form

$$F_n := \{x \in X \mid \forall\ i \in I\ \|A_i x\| \leq n\}.$$

Da A_i stetig ist, sind die F_n abgeschlossen und $\bigcup F_n = X$. Nach dem Satz von Baire (Satz 1.4) gibt es dann einen Index n_0, für den das Innere von F_{n_0} nicht leer ist. Also gibt es einen Punkt $x_0 \in F_{n_0}$ und einen Radius $r > 0$, so dass

$$\overline{B_r(x_0)} \subseteq \operatorname{int} F_{n_0}.$$

Also gilt für alle $z \in \overline{B_1(0)}$ und für alle $i \in I$:

$$\|A_i(x_0 + rz)\| \leq n_0$$

Demzufolge gilt $r\|A_i z\| \leq \|A_i(x_0 + rz)\| + \|A_i x_0\| \leq n_0 + \|A_i x_0\|$, und wir erhalten

$$\forall\ z \in \overline{B_1(0)}\ \text{und}\ \forall\ i \in I : \|A_i z\| \leq \frac{n_0 + \|A_i x_0\|}{r}.$$

Also $\|A_i\| = \sup\limits_{\|z\|\leq 1} \|A_i z\| \leq c(r, x_0, n_0)$.
Also können wir auch das Supremum über alle i bilden und bekommen

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{L(X,Y)} < \infty$$

■

• (1.3) ist äquivalent zu: $\exists\, K > 0\, \forall\, i \in I$:

$$\|A_i x\| \leq K\|x\| \tag{1.6}$$

1.7 Folgerung. *Seien X, Y Banachräume. Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lineare, beschränkte Operatoren von X nach Y, so dass für $x \in X$ die Folge $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $Ax \in Y$ konvergiert. Dann gilt:*

(i) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{L(X,Y)} < \infty$

(ii) $A \in L(X, Y)$

(iii) $\|A\|_{L(X,Y)} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$

Beweis :

(i) Für alle $x \in X$ konvergiert nach Voraussetzung die Folge $(A_n x)_n$ gegen Ax, also ist die Folge $(A_n x)$ beschränkt, d.h.

$$\forall x \in X : \|A_n x\| \leq K\|x\|.$$

Dann folgt mit Satz 1.1 (Banach-Steinhaus), dass die Folge $(\|A_n\|)$ gleichmäßig beschränkt ist, d.h. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$

(ii) Für alle $x \in X$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\|A_n x\| \leq K\|x\|$ also auch für $n \to \infty$ $\|Ax\| \leq K\|x\|$. Also ist A beschränkt. A ist linear da die A_n linear sind.

(iii) Für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gilt $\|A_n x\| \leq \|A_n\|\|x\|$, also auch
$\liminf \|A_n x\| \leq \liminf \|A_n\| \Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \liminf \|A_n\|$

■

1.8 Folgerung. *Sei X ein Banachraum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Falls für alle $f \in X^*$ die Menge*

$$f(M) = \bigcup_{x\in M} \langle f, x\rangle$$

in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist auch M beschränkt.

Beweis : Wende Satz 1.1 an mit $X = X^*$, $Y = \mathbb{R}$, $I = M$.
Für alle $x \in M$ setzen wir $A_x(f) := \langle f, x\rangle$. A_x ist eine lineare und beschränkte Abbildung von X^* nach $\mathbb{R}$, also ist auch für alle $f \in X^*$ $\bigcup\langle f, x\rangle = \bigcup A_x(f)$ beschränkt, d.h. $\sup\limits_{x\in M} |A_x(f)| < \infty$. Wir haben also gezeigt, dass die Abbildung A_x punktweise beschränkt ist. Nun können wir Satz 1.1 anwenden. Es gibt also ein $K > 0$, so dass für alle $f \in X^*$ und für alle $x \in M$ gilt:

$$|\langle f, x\rangle| \le K\|f\|_{X^*}$$

Daraus folgern wir mithilfe von (1.11) aus Kapitel 1, dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\|x\| \le K\,.$$

■

1.9 Folgerung. *Sei X ein Banachraum und sei $M^* \subseteq X^*$ eine Teilmenge. Falls für alle $x \in X$ die Menge*

$$\langle M^*, x\rangle := \bigcup_{f\in M^*} \langle f, x\rangle$$

in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist auch M^* in X^* beschränkt.

Beweis : Analog wie beim Beweis von Folgerung 1.8 wollen wir Satz 1.1 anwenden mit $X = X$, $Y = \mathbb{R}$, $I = M^*$.
Für alle $f \in M^*$ definieren wir $A_f(x) := \langle f, x\rangle$. Dies ist eine lineare und beschränkte Abbildung von X nach $\mathbb{R}$. Dann ist nach Voraussetzung für alle $x \in X$ $\sup\limits_{f\in M^*} |A_f(x)| \le K(x)$. Also können wir mit Satz 1.1 folgern, dass es ein $K > 0$ gibt, so dass für alle $f \in M^*$ und für alle $x \in X$:

$$|\langle f, x\rangle| \le K\|x\|_X$$

Wenn wir also $x \in \overline{B_1(0)}$ wählen, folgt für alle $f \in M^*$:

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|\le 1} |\langle f, x\rangle| \le K$$

■

• Für $X = \mathbb{R}^n$ gilt $(\mathbb{R}^n)^* \hat{=} \mathbb{R}^n$. Sei (e_k) eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$ $\langle f, x\rangle \rightsquigarrow e_k{\cdot}x = x_k$ k-te Komponente, d.h. komponentenweise Beschränktheit $\Rightarrow$ Beschränktheit der Menge.

2.2 Die Sätze von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen

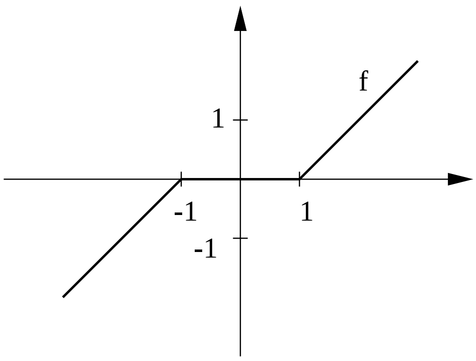
Ebenfalls eine Folge des Baireschen Kategoriensatzes ist der Satz von der offenen Abbildung.

2.1 Definition. *Eine Abbildung eines topologischen Raumes in einen anderen heißt* ***offen****, wenn sie offene Mengen in offene Mengen überführt.*

2.2 Satz (von der offenen Abbildung). *Jede stetige, lineare, surjektive Abbildung $A : X \to Y$ eines Banachraumes X in einen Banachraum Y ist offen.*

• Betrachten wir den Fall $X = Y = \mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie. Stetige, surjektive nichtlineare Abbildungen sind selbst hier nicht offen. Beispiel für $n = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } |x| \leq 1, \\ x - 1, & \text{für } x > 1, \\ x + 1, & \text{für } x < -1. \end{cases}$$



Offensichtlich ist $f\big(U_\varepsilon(1)\big)$ nicht notwendig offen.

Der Fall $X = Y = \mathbb{R}^n$ mit einer linearen, surjektiven Abbildung A ist elementar. Wenn A surjektiv ist, gilt $\det A > 0$ und A^{-1} existiert auf $\mathbb{R}^n$. Da A^{-1} stetig, sind Urbilder offener Mengen offen, d.h. A ist offen.

Beweis (Satz 2.2): (i) Wir zeigen, dass eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$B_{2c} \subset \overline{AB_1} \tag{2.3}$$

Hierbei ist $B_r = B_r(0)$ und AB_1 das Bild von B_1 unter der Abbildung A, der Querstrich bedeutet den Abschluss der Menge.

Um (2.3) zu beweisen, setzen wir $F_n = n\overline{AB_1}$. Da A surjektiv ist, gilt $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = Y$, und nach dem Satz von Baire (Satz 2.4) muss eines der F_n eine Kugel enthalten, d.h. $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$. Daraus folgt, dass auch $\operatorname{int} F_1 = \operatorname{int} \overline{AB_1} \neq \emptyset$, d.h. $\exists c > 0$ und $y_0 \in F$ mit

$$B_{4c}(y_0) \subset \overline{AB_1}\,.$$

Insbesondere ist $y_0 \in \overline{AB_1}$ und aus Symmetriegründen $-y_0 \in \overline{AB_1}$. Daraus folgt

$$B_{4c}(0) = -y_0 + B_{4c}(y_0) \subset \overline{AB_1} + \overline{AB_1} = 2\overline{AB_1}\,.$$

Daraus ergibt sich (2.3).
(ii) Wir zeigen, dass mit obigem c

$$B_c \subset AB_1\,. \tag{2.4}$$

Um (2.4) zu beweisen, müssen wir zu $y \in B_c$ ein $x \in B_1$ mit $Ax = y$ finden. Wegen (2.3) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $z \in X$ mit $\|z\| < \frac{1}{2}$ und $\|y - Az\| < \varepsilon$, denn

$$y \in B_c \subset \overline{AB_{1/2}}\,.$$

Wählt man $\varepsilon = \frac{c}{2}$, hat man ein $z_1 \in X$ mit

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \|y - Az_1\| < \frac{c}{2}\,.$$

Wir wiederholen das Spielchen mit $y - Az_1$ anstelle von y und wählen nun $\varepsilon = \frac{c}{4}$. Da $y - Az_1 \in B_{c/2} \subset \overline{AB_{1/4}}$, finden wir ein z_2 mit

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \|(y - Az_1) - Az_2\| < \frac{c}{4}\,.$$

Dieses Argument wird wiederholt, und wir erhalten eine Folge (z_n) mit

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{und} \quad \|y - A(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}\,.$$

Die Elemente $x_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ bilden daher eine Cauchyfolge mit Limes x. Es gilt $\|x_n\| \leq \|z_1\| + \sum\limits_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ und somit

$$\|x\| \leq \|z_1\| + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1\,.$$

Ferner gilt $\|y - Ax_n\| \to 0$, und schließlich $y - Ax = 0$. Das gewünschte x mit $\|x\| < 1$ ist damit konstruiert.
(iii) Sei $U \subseteq X$ offen und sei $y \in AU$. Dann gibt es ein $x_0 \in U$ mit $y = Ax_0$. Da U offen ist gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ und also gilt

$$AB_\varepsilon(x_0) \subseteq AU\,.$$

Aber $AB_\varepsilon(x_0) = Ax_0 + \varepsilon AB_1$, was mit Hilfe von (2.4) liefert $AB_\varepsilon(x_0) \supseteq Ax_0 + \varepsilon B_c = B_{\varepsilon c}(Ax_0) = B_{\varepsilon c}(y)$, d.h. $B_{\varepsilon c}(y) \subseteq AU$, d.h. AU ist offen. ∎

Aus dem Satz über die offene Abbildung folgt der Satz von der stetigen Inversen, da die Stetigkeit einer Abbildung äquivalent dazu ist, dass Urbilder offener Mengen offen sind.

2.5 Satz (von der stetigen Inversen). *Es seien X und Y Banachräume und $A : X \to Y$ linear, stetig und bijektiv. Dann ist A^{-1} stetig.*

Beweis : Wir bezeichnen $B := A^{-1} : Y \to X$. Sei $U \subseteq X$ offen. Das Urbild $B^{-1}U$ ist aber die Menge AU, da $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$ gilt. Aber nach Satz 2.2 ist die Abbildung A offen, d.h. AU ist offen. Somit ist auch $B^{-1}U$ offen, d.h. $B = A^{-1}$ ist stetig. ∎

Eine weitere Folgerung ist die Äquivalenz von Normen.

2.6 Satz. *Der Vektorraum B sei bezüglich der Normen $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ vollständig. Es gelte $\|u\|_1 \leq \|u\|_0$ für alle $u \in B$. Dann gibt es eine Konstante K, so dass*

$$\|u\|_0 \leq K\|u\|_1\,.$$

Beweis : Wir wenden Satz 2.5 an mit $A = I$ als identischer Abbildung. Der Raum X bzw. Y sei der mit $\|\cdot\|_0$ bzw. $\|\cdot\|_1$ versehene Raum B. Als Abbildung von X nach Y ist die identische Abbildung I stetig, da $\|x\|_1 = \|Ix\|_1 \leq \|x\|_0$. Nach Satz 2.5 ist daher die Inverse stetig; daraus folgt, dass ein $K > 0$ existiert mit

$$\|x\|_0 = \|I^{-1}x\|_0 \leq K\|x\|_1\,.$$

∎

Eine weitere elegante Folge ist:

2.7 Satz (vom abgeschlossenen Graphen). *Seien X und Y Banachräume, $A : X \to Y$ linear. Der Graph $G(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y\}$ sei abgeschlossen in $X \times Y$, das heißt aus $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$ in $X \times Y$ folgt $y = Ax$. Dann ist A stetig.*

Beweis : Wir versehen X mit der Graphennorm

$$\|x\|_{G(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Der Raum X versehen mit der Graphennorm ist ein Banachraum. In der Tat, sei $(x_n) \subseteq X$ eine Cauchyfolge, bezüglich $\|\cdot\|_{G(A)}$. Dann sind sowohl $(x_n) \subseteq X$ als auch $(Ax_n) \subseteq Y$ Cauchyfolgen und es gibt Elemente $x \in X$ und $y \in Y$ mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$. Da der Graph abgeschlossen ist, folgt $y = Ax$ und somit konvergiert x_n bezüglich der Graphennorm gegen x. Weiter gilt

$$\|x\|_X \le \|x\|_{G(A)}$$

und Satz 2.6 liefert die Existenz einer Konstante $K > 0$, mit

$$\|Ax\| \le \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_{G(A)} \le K\|x\|,$$

d.h. A ist beschränkt.

■

2.8 Satz. *Seien V, W abgeschlossene lineare Unterräume des Banachraumes X so, dass $V + W$ abgeschlossen ist. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ so, dass für alle $z \in V+W$ eine Darstellung $z = v+w$ existiert mit $v \in V$, $w \in W$ und*

$$\|v\| \le c\|z\|, \qquad \|w\| \le c\|z\|. \tag{2.9}$$

Beweis : Wir versehen den Raum $V \times W$ mit der Norm $\|(v,w)\| := \|v\| + \|w\|$ und den Raum $V+W \subseteq X$ mit der Norm von X. Dann definieren wir die Abbildung $A : V \times W \to V+W : (v,w) \mapsto v+w$. A ist offensichtlich linear und surjektiv. Außerdem ist A stetig, da A beschränkt ist mit Konstante 1:

$$\|A(v,w)\| = \|v+w\| \le \|v\| + \|w\| = \|(v,w)\|_{V\times W}.$$

Dann folgt aus Satz 2.2 (Satz von der offenen Abbildung), dass A offen ist. Im Beweis von Satz 2.2 haben wir die Ungleichung (2.4) bewiesen:

$$\exists\, c > 0 : \ B_c(0) \subseteq AB_1(0),$$

d.h. für alle $z \in V+W$ mit $\|z\| < c$ gibt es ein $v \in V$ und ein $w \in W$, so dass gilt:

$$z = A(v,w) = v + w \text{ wobei } \|(v,w)\| = \|v\| + \|w\| < 1.$$

Wir können nun skalieren, so dass die Aussage für alle $z \in V+W$ gilt. In der Tat: $z \in V+W \Rightarrow \frac{c}{1+\varepsilon}\frac{z}{\|z\|} \in B_c(0)$. Also gibt es ein $v' \in V$ und ein $w' \in W$

mit
$\|v'\| + \|w'\| < 1$ und $\frac{cz}{(1+\varepsilon)\|z\|} = v' + w' \Rightarrow z = \underbrace{\frac{(1+\varepsilon)\|z\|}{c}}_{=:\alpha}(v' + w') =: v + w$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \|v\| + \|w\| &= \|\alpha v'\| + \|\alpha w'\| \\ &= \alpha(\|v'\| + \|w'\|) \\ &< \frac{1+\varepsilon}{c}\|z\| \end{aligned}$$

Dies gilt für $\varepsilon > 0\,, \varepsilon$ beliebig. $\Rightarrow \|v\| + \|w\| \leq \frac{1}{c}\|z\|$

∎

Eine weitere überraschende Folgerung aus unseren Sätzen ist der *Satz von Hellinger-Toeplitz:*

2.10 Satz. *Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ linear und selbstadjungiert, d.h für alle $x, y \in H$ gilt: $(Ax, y)_H = (x, Ay)_H$. Dann ist A beschränkt.*

Beweis : Wir versehen H mit der Graphen-Norm $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$. H ist bezüglich $\|x\|_A$ vollständig! Gilt nämlich $\|x_j - x_k\|_A \to 0$, so folgt $\|x_j - x_k\| \to 0$ und $\|Ax_j - Ax_k\| < \varepsilon$ für $j, k \geq n_0(\varepsilon)$. Hieraus schließen wir $|(Ax_j - Ax_k, \varphi)| < \varepsilon$ für alle φ mit $\|\varphi\| \leq 1$, $j, k \geq n_0(\varepsilon)$. Aufgrund der Vollständigkeit von $(H, \|\,.\,\|)$ folgt die Existenz von $x \in H$ mit $x_k \to x$, und es gilt $(Ax_k, \varphi) = (x_k, A\varphi) \to (x, A\varphi) = (Ax, \varphi)$ für $k \to \infty$. Weiter folgt

$$|(Ax_j - Ax, \varphi)| < \varepsilon \qquad \|\varphi\| \leq 1\,,$$

und somit

$$\|Ax_j - Ax\| \leq \varepsilon \qquad j \geq n_0\,.$$

Da $\|x\| \leq \|x\|_A$ und H bezüglich beider Normen vollständig ist, folgt aus Satz 2.6 die Ungleichung

$$\|x\|_A \leq K\,\|x\|$$

und

$$\|Ax\| \leq (K-1)\,\|x\|\,.$$

∎

2.3 Adjungierte lineare Operatoren in Banach-Räumen

Wir wollen nun die Bildbereiche von linearen Operatoren in Banachräumen charakterisieren. Dazu ist es nützlich einerseits Orthogonalitätsrelationen in

Banachräumen zu betrachten als auch adjungierte Operatoren einzuführen.
• Wenn $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist, ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und wir wollen wissen wann das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung besitzt.

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right) =: (\tilde{A}, \tilde{b})$$

$$Ax = b \,\text{ist lösbar} \Leftrightarrow \tilde{b_4} = \tilde{b_5} = 0.$$

Dies kann man auch anders formulieren: Die transponierte Matrix $\tilde{A}^T$ hat die Form

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen sofort: $\ker(\tilde{A}^T) = \operatorname{span}\{(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ und es gilt:
$Ax = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow \forall\, y \in \ker(A^T)$ gilt:

$$(y, b) = 0$$

3.1 Definition. *Sei X ein Banachraum. Das **Orthogonalkomplement** einer Menge $M \subset X$ ist die Menge*

$$M^\perp := \{f \in X^* \,\big|\, \langle f, m\rangle = 0 \quad \textit{für alle } m \in M\} \subset X^*\,.$$

*Analog definiert man für Mengen $N \subset X^*$ das **Präorthogonalkomplement** durch*

$$N^\perp = \{x \in X \,\big|\, \langle f, x\rangle = 0 \textit{ für alle } f \in N\} \subset X\,.$$

*Man nennt die Menge $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$ auch das **Biorthogonalkomplement** von M.*

• *Es ist klar, dass $M^\perp$ und $N^\perp$ lineare Unterräume sind.*

3.2 Satz. *Sei X ein Banachraum und $W \subset X$ ein linearer Teilraum. Dann gilt*

$$W^{\perp\perp} = \overline{W}\,.$$

Sei $Y \subset X^*$ ein linearer Teilraum. Dann gilt

$$Y^{\perp\perp} \supset \overline{Y}\,.$$

Beweis : Es ist klar, dass $W \subset W^{\perp\perp}$, denn ist $w \in W$, so gilt $\langle f, w \rangle = 0$ für alle $f \in W^{\perp}$. Dies impliziert $w \in W^{\perp\perp}$. Ferner ist klar, dass $W^{\perp\perp}$ abgeschlossen ist, da $M^{\perp}$ für jede Menge M abgeschlossen ist. In der Tat, wenn $f_j \to f$, $f_j \in M^{\perp}$, folgt $0 = \langle f_j, m \rangle \to \langle f, m \rangle$, d.h. $f \in M^{\perp}$, und entsprechend für $M^{\perp\perp}$.
Da $W \subset W^{\perp\perp}$, gilt somit $\overline{W} \subset W^{\perp\perp}$. Angenommen, $\overline{W}$ wäre echt in $W^{\perp\perp}$ enthalten. Dann gibt es ein $x_0 \in W^{\perp\perp}$ mit $x_0 \notin \overline{W}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (Satz 2.11) gibt es eine abgeschlossene Hyperebene, die x_0 und $\overline{W}$ trennt, d.h. es existiert $f \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle \,, \qquad x \in \overline{W} \,.$$

Da $\overline{W} \subseteq X$ ein linearer Teilraum ist, folgt $\langle f, x \rangle = 0$ für alle $x \in \overline{W}$ (man ersetze x durch λx, $\lambda \to \infty$), d.h. $f \in \overline{W}^{\perp} \subseteq X^*$. Da andererseits $x_0 \in W^{\perp\perp} \subseteq X$, gilt dann $\langle f, x_0 \rangle = 0$. Dies ist ein Widerspruch und die 1. Behauptung ist bewiesen. Analog beweist man $Y \subset Y^{\perp\perp}$ und dass $Y^{\perp\perp}$ abgeschlossen ist. Daraus folgt die 2. Behauptung und der Satz ist bewiesen. ■

• In der zweiten Behauptung des Satzes gilt keine Gleichheit, denn wenn wir den Beweis analog durchführen wollten, erhielten wir:
Annahme: $\overline{Y} \subsetneqq Y^{\perp\perp} \subseteq X^*$. Dann gibt es ein $f_0 \in Y^{\perp\perp} \setminus \overline{Y} \subseteq X^*$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es dann ein $\varphi \in X^{**}$:

$$\varphi(f) < \alpha < \varphi(f_0) \qquad \forall\ f \in \overline{V}.$$

Dann folgt mit den gleichen Argumenten wie im ersten Teil, dass $\forall\ f \in \overline{Y}\ \varphi(f) = 0$. Aber daraus können wir nicht folgern, dass $\varphi \in \overline{Y}^{\perp} \subseteq X$, da $\varphi \in X^{**}$, d.h. wir können die Annahme nicht zum Widerspruch führen.

• Rettung: $\forall\ \varphi \in V^{**}\ \exists\ x_0 \in X$:

$$\varphi(f) = \langle f, x_0 \rangle$$

Diese Aussage ist richtig für reflexive Banachräume.

• Wir haben folgende Inklusionen:

$$\begin{array}{ccc} W \subseteq X & W^{\perp} \subseteq X^* & W^{\perp\perp} \subseteq X \\ Y \subseteq X^* & Y^{\perp} \subseteq X & Y^{\perp\perp} \subseteq X^* \end{array}$$

• Insbesondere haben wir bewiesen, dass für $W \subseteq X$ und $Y \subseteq X^*$ die linearen Teilräume $W^{\perp}$ und $Y^{\perp}$ immer abgeschlossen sind.

3.3 Satz. *Seien V, W abgeschlossene, lineare Teilräume des Banachraumes X. Dann gilt:*

(i) $V \cap W = (V^\perp + W^\perp)^\perp$,

(ii) $V^\perp \cap W^\perp = (V + W)^\perp$.

Beweis :

(i) "$\subseteq$" Sei $x \in V \cap W$ und
$f \in V^\perp + W^\perp = \{f \in X^* \,|\, f = v^* + w^*,\ v^* \in V^\perp,\ w^* \in W^\perp\}$,
dann ist $\langle f, x\rangle = \langle v^*, x\rangle + \langle w^*, x\rangle = 0 + 0$.

"$\supseteq$" Offensichtlich ist $V^\perp \subseteq V^\perp + W^\perp$, also ist auch $(V^\perp + W^\perp)^\perp \subseteq V^{\perp\perp}$.
Allgemeiner gilt: Y Banachraum, $U_1 \subseteq U_2 \subseteq Y$, dann folgt $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$, denn:
$f \in U_2^\perp \Rightarrow \langle f, x\rangle = 0\ \forall\ x \in U_2 \supseteq U_1 \Rightarrow \langle f, x\rangle = 0\ \forall x \in U_1$
$\Rightarrow f \in U_1^\perp$.
Also haben wir gezeigt, dass $(V^\perp + W^\perp)^\perp \subseteq V^{\perp\perp} \overset{\text{Satz 3.2}}{=} V$.

(ii) "$\subseteq$" $f \in V^\perp \cap W^\perp$
$\Rightarrow \forall\ x \in V$ gilt $\langle f, v\rangle = 0$ und $\forall\ y \in W\ \langle f, y\rangle = 0$
$\Rightarrow f \in (V + W)^\perp$.

"$\supseteq$" Sei $f \in (V + W)^\perp$. Also gilt für alle $x \in V + W$ mit $x = v + w,\ v \in V,\ w \in W : \langle f, v + w\rangle = 0$,
aber $V \subseteq V + W \Rightarrow \langle f, v + 0\rangle = \langle f, v\rangle = 0$
$W \subseteq V + W \Rightarrow \langle f, 0 + w\rangle = \langle f, w\rangle = 0$
$\Rightarrow f \in V^\perp \cap W^\perp$

■

3.4 Folgerung. *Seien V, W abgeschlossene, lineare Teilräume des Banachraumes X. Dann gilt:*

(i) $(V \cap W)^\perp \supseteq \overline{V^\perp + W^\perp}$,

(ii) $(V^\perp \cap W^\perp)^\perp = \overline{V + W}$.

Beweis :

(i) $V \cap W \overset{\text{Satz 3.3}}{=} (V^\perp + W^\perp)^\perp$
$\Rightarrow (V \cap W)^\perp = (V^\perp + W^\perp)^{\perp\perp} \overset{\text{Satz 3.2}}{\supseteq} \overline{V^\perp + W^\perp}$

(ii) $V^\perp \cap W^\perp \overset{\text{Satz 3.3}}{=} (V + W)^\perp$
$\Rightarrow (V^\perp \cap W^\perp)^\perp = (V + W)^{\perp\perp} \overset{\text{Satz 3.2}}{=} \overline{V + W}$

■

3.5 Satz. *Seien V, W abgeschlossene, lineare Teilräume des Banachraumes X. Dann sind äquivalent:*

(i) $V + W$ *ist abgeschlossen in* X,

(ii) $V^\perp + W^\perp$ *ist abgeschlossen in* X^*,

(iii) $V + W = (V^\perp \cap W^\perp)^\perp$,

(iv) $V^\perp + W^\perp = (V \cap W)^\perp$.

Beweis :

(i) ⇒ (iii) Folgerung 3.4 (ii)

(iii) ⇒ (i) $M^\perp$ ist abgeschlossen

(iv) ⇒ (ii) $M^\perp$ ist abgeschlossen

(i) ⇒ (iv) Satz 3.3 (i) besagt, dass $V \cap W = (V^\perp + W^\perp)^\perp$ also ist $(V \cap W)^\perp = (V^\perp + W^\perp)^{\perp\perp} \overset{Satz 3.2}{\supseteq} V^\perp + W^\perp$
Nun müssen wir noch die umgekehrte Inklusion zeigen:
Sei $f \in (V \cap W)^\perp$. Wir definieren die Abbildung $\varphi : V + W \to \mathbb{R}$, die jedem $x \in V + W$, das also die Darstellung $x = v + w$ mit $v \in V$, $w \in W$ hat, das Element $\varphi(x) := \langle f, v\rangle$ zuordnet. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn sei $x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \Rightarrow v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V \cap W$. Dann ist $\langle f, v_1 - v_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f, v_1\rangle = \langle f, v_2\rangle$. Außerdem ist φ linear (klar).
Aus Satz 2.8 folgt, dass es ein $c > 0$ gibt, so dass es für alle $x \in V + W$ eine Darstellung $x = v + w$ mit $v \in V$ $w \in W$ gibt, so dass gilt:

$$\|v\| + \|w\| \le c\|x\|.$$

Also gilt auch

$$|\varphi(x)| = |\langle f, v\rangle| \le \|f\|_{X^*}\|v\|_X \le c\|f\|_{X^*}\|x\|_X \quad \Rightarrow \varphi \in (V + W)^*$$

Da $V + W \subseteq X$ können wir den Satz von Hahn-Banach anwenden, es existiert also eine Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in X^*$. f lässt sich dann schreiben als $f = (f - \tilde{\varphi}) - f$, d.h. $f \in V^\perp + W^\perp$, denn:
• $(f - \tilde{\varphi}) \in V^\perp$, denn: $\langle f - \tilde{\varphi}, v\rangle = \langle f, v\rangle - \langle \tilde{\varphi}, v\rangle = \langle f, v\rangle - \langle f, v\rangle = 0$ mit $v \in V \subseteq V + W$
• $\tilde{\varphi} \in W^\perp$, denn $\forall\, w \in W \subseteq V + W$ gilt $\langle \tilde{\varphi}, w\rangle = \varphi(w) = \varphi(0 + w) = 0$

(ii) $\Rightarrow$ (i) sprengt den Rahmen (siehe Brezis S.25)

■

Es seien X und Y Banachräume. Wir betrachten nicht notwendig beschränkte, lineare Operatoren $A : D(A) \to Y$, wobei $D(A)$ ein linearer Unterraum von X ist. Wie in der internationalen Literatur üblich, wollen wir den Bildbereich von A mit $R(A)$ bezeichnen:

$$R(A) := A(D(A)) \subset Y\,,$$

der Kern ist definiert durch

$$N(A) := \{x \in D(A) \,\big|\, Ax = 0\}\,.$$

Der Vektorraum der beschränkten, linearen Funktionale auf X bzw. Y wird wieder mit X^* bzw. Y^* bezeichnet.

3.6 Definition. *Sei $A : D(A) \subset X \to Y$ ein linearer Operator und sei $D(A)$ ein dichter linearer Unterraum von X. Wir setzen*

$$D(A^*) := \{v \in Y^* \,\big|\, \exists c \geq 0,\ \textit{so dass}\ |\langle v, Au\rangle| \leq c\,\|u\|\ \textit{für alle}\ u \in D(A)\}.$$

*Ist nun $v \in D(A^*)$, so definiert $\varphi(u) = \langle v, Au\rangle$ ein **beschränktes lineares Funktional** auf $D(A)$, welches durch Abschluss auf ganz X zu einem Element $f \in X^*$ fortgesetzt werden kann:*

$$\langle f, u\rangle = \varphi(u) = \langle v, Au\rangle \qquad u \in D(A)\,.$$

*Man definiert den **adjungierten Operator** $A^* : D(A^*) \subseteq Y^* \to X^*$ durch*

$$A^*v := f\,.$$

Es ist klar, dass f eindeutig ist, denn aus $\langle f, u\rangle = \langle \tilde{f}, u\rangle = \varphi(u)$ für $u \in D(A)$ folgt $f = \tilde{f}$, da u dicht in X ist und $f, \tilde{f}$ stetig sind. Ebenso ist die Linearität von A^* und $D(A^*)$ klar.
Auf Grund der Definition von A^* haben wir

$$\langle A^*v, u\rangle_{X^*,X} = \langle v, Au\rangle_{Y^*,Y} \qquad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*)\,.$$

Wir behandeln die Lösbarkeit der Gleichung $Au = f$ oder anders gesagt die Charakterisierung des Bildes von A für nicht notwendig beschränkte, jedoch wenigstens *abgeschlossene* lineare Operatoren A. Für die meisten Anwendungen reicht dies aus.

3.7 Definition. *Sei $A : D(A) \subseteq X \to Y$ linear und sei $D(A)$ dicht in X. Dann heißt A* ***abgeschlossen****, wenn der Graph*

$$G(A) := \{(v, Av) \,\big|\, v \in D(A)\}$$

abgeschlossen in $X \times Y$ ist.

• Im Allgemeinen ist $D(A^*)$ nicht dicht in Y^*, selbst wenn A abgeschlossen ist. Falls Y reflexiv ist kann man zeigen, dass $D(A^*)$ dicht in Y^* ist.

3.8 Lemma. *Sei $A : D(A) \subset X \to Y$ linear, $\overline{D(A)} = X$. Dann ist A^* abgeschlossen, d.h. der Graph $G(A^*) := \big\{(v, A^*v)\big|\; v \in D(A^*)\big\}$ ist abgeschlossen in $Y^* \times X^*$.*

Beweis : Sei $v_n \to v,\ A^*v_n \to f,\ v_n \in D(A^*)$, in Y^* bzw. X^*. Wir müssen zeigen, dass

$$v \in D(A^*) \quad \text{ und } \quad A^*v = f\,.$$

Es gilt aber:

$$\langle v_n, Au\rangle = \langle A^*v_n, u\rangle\,, \quad u \in D(A)\,,$$

nach Grenzübergang $n \to \infty$

$$\langle v, Au\rangle = \langle f, u\rangle\,,$$

woraus man $v \in D(A^*)$ und $A^*v = f$ abliest. ■

• Sei $A : D(A) \subseteq X \to Y$ linear und $D(A)$ ein dichter, linearer Teilraum. Wir definieren die Abbildung:

$$J : Y^* \times X^* \to X^* \times Y^* : (y^*, x^*) \mapsto (-x^*, y^*). \tag{3.9}$$

3.10 Lemma. *Sei $A : D(A) \subseteq X \to Y$ linear und $\overline{D(A)} = X$. Dann gilt für die Graphen von A und A^**

$$J(G(A^*)) = G(A)^\perp.$$

• $(f, g) \in (X \times Y)^* = X^* \times Y^*$, $(x, y) \in X \times Y$, dann definieren wir

$$\langle (f, g), (x, y)\rangle_{(X^*\times Y^*),(X\times Y)} = \langle f, x\rangle_{X^*,X} + \langle g, y\rangle_{Y^*,Y}$$

Beweis : Es gilt:

$$\begin{aligned}
&(y^*, x^*) \in G(A^*) \subseteq Y^* \times X^* \\
&\qquad \Leftrightarrow y^* \in D(A^*) \quad \& \quad x^* = A^*y^* \\
&\qquad \Leftrightarrow y^* \in D(A^*) \quad \& \quad \langle x^*, x\rangle = \langle A^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle \quad \forall\, x \in D(A) \\
&\qquad \Leftrightarrow y^* \in D(A^*) \quad \& \quad \forall\, x \in D(A) :\ \langle -x^*, x\rangle + \langle y^*, Ax\rangle = 0 \\
&\qquad \Leftrightarrow (-x^*, y^*) \in G(A)^\perp \\
&\qquad \Leftrightarrow J(y^*, x^*) \in G(A)^\perp
\end{aligned}$$

■

• $E := X \times Y \qquad E^* := X^* \times Y^*$. Dann sind $G := G(A) \subseteq E$ und $L := X \times \{0\} \subseteq E$ jeweils lineare Teilräume.

• Man kann $R(A)$, $R(A^*)$, $N(A)$ und $N(A^*)$ mithilfe von G und L ausdrücken:

$$N(A) \times \{0\} = G \cap L, \tag{3.11}$$

denn in der linken Menge sind die Elemente (x, Ax) mit $x \in D(A)$ und $Ax = 0$ und in der rechten Menge sind die Elemente $(x, 0) \in G(A)$, d.h. $x \in D(A)$ und $0 = Ax$.

$$X \times R(A) = G + L, \tag{3.12}$$

denn in der linken Mengen sind die Elemente der Form (x, Av) mit $v \in D(A)$ und in der rechtem Menge sind die Elemente der Form $(x, Ax) + (w, 0)$ mit $x \in D(A)$, $w \in X$.

$$\{0\} \times N(A^*) = G^\perp \cap L^\perp, \tag{3.13}$$

denn in $G^\perp$ sind die (x^*, y^*) mit $0 = \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle + \langle A^*y^*, x\rangle \ \forall\ x \in D(A)$ und in $L^\perp$ sind die (x^*, y^*) mit $0 = \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, 0\rangle = \langle x^*, x\rangle$ also ist $x^* = 0$. Daraus folgt $y^* \in N(A^*)$.

$$R(A^*) \times Y^* = G^\perp + L^\perp, \tag{3.14}$$

denn in der linken Menge sind die (x^*, z^*) mit $x^* \in X^*$, $z^* \in Y^*$ für die es ein $y^* \in D(A^*)$ gibt mit $x^* = A^*y^*$, die Elemente haben also die Form (A^*y^*, z^*) mit $y^* \in D(A^*)$, $z^* \in Y^*$.
In der rechten Menge sind die Elemente der Form $(x^*, y^*) + (v^*, w^*)$.

> $(x^*, y^*) \in G^\perp \Leftrightarrow 0 = \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, Ax\rangle = \langle x^*, x\rangle + \langle A^*y^*, x^*\rangle \ \forall\ x \in D(A) \Rightarrow x^* = A^*y^*$, $y^* \in D(A^*)$
>
> $(v^*, w^*) \in L^\perp \Leftrightarrow \langle v^*, x\rangle + \langle w^*, 0\rangle = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow v^* = 0$

Daraus folgt, dass sich die rechte Seite schreiben lässt als $(A^*y^*, y^*) + (0, w^*) = (A^*y^*, y^* + w^*)$, $y^* \in D(A^*)$, $w^* \in Y^*$.

3.15 Folgerung. *Sei $A : D(A) \subset X \to Y$ abgeschlossen und linear mit $\overline{D(A)} = X$. Dann gilt:*

(i) $N(A) = R(A^*)^\perp$,

(ii) $N(A^*) = R(A)^\perp$,

(iii) $N(A) \supseteq \overline{R(A^*)}$,

(iv) $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$.

Beweis :

(i) In (3.14) haben wir gezeigt, dass $R(A^*) \times Y^* = G^\perp + L^\perp$ und es ist

$$(G^\perp + L^\perp)^\perp \overset{\text{Satz 3.3(i)}}{=} G \cap L \overset{(3.11)}{=} N(A) \times \{0\}.$$

Andererseits ist

$$(R(A^*) \times Y^*)^\perp = R(A^*)^\perp \times \{0\}$$

und daraus folgt die Behauptung.

(ii) In (3.12) haben wir gezeigt, dass $X \times R(A) = G + L$. Aus

$$(G + L)^\perp \overset{\text{Satz 3.3(ii)}}{=} G^\perp \cap L^\perp \overset{(3.13)}{=} \{0\} \times N(A^*)$$

und

$$(X \times R(A))^\perp = \{0\} \times (R(A))^\perp$$

folgt dann die Behauptung.

(iii) In (i) haben wir gezeigt, dass $N(A) = R(A^*)^\perp$, also ist $N(A)^\perp = R(A^*)^{\perp\perp} \overset{\text{Satz 3.2}}{\supseteq} \overline{R(A^*)}$.

(iv) In (ii) haben wir gezeigt, dass $N(A^*) = R(A)^\perp \Rightarrow N(A^*)^\perp = R(A)^{\perp\perp} \overset{\text{Satz 3.2}}{=} \overline{R(A)}$.

■

Die Aussage des vorigen Satzes lässt sich verschärfen, wenn man die Abgeschlossenheit des Bildbereiches $R(A)$ fordert:

3.16 Satz. *Sei $A : D(A) \subset X \to Y$ abgeschlossen, linear und $D(A)$ dicht in X. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) *$R(A)$ ist abgeschlossen.*

(ii) *$R(A^*)$ ist abgeschlossen.*

(iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$.

(iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$.

Beweis : Mit Hilfe von (3.11) bis (3.14) gilt:

(i) $R(A)$ und X sind abgeschlossen genau dann, wenn $R(A) \times X$ abgeschlossen ist $\Leftrightarrow X \times R(A)$ abegeschlossen und dies ist nach (3.12) genau dann der Fall, wenn $G + L$ abgeschlossen ist.

(ii) $R(A^*)$ und Y^* sind abgeschlossen genau dann, wenn $R(A^*) \times Y^*$ abgeschlossen ist und dies ist nach (3.14) genau dann der Fall, wenn $G^\perp + L^\perp$ abgeschlossen ist.

(iii) $R(A^*) = N(A)^\perp \Leftrightarrow G + L \overset{(3.12)}{=} X \times R(A) = X \times N(A^*)^\perp = (\{0\} \times N(A^*))^\perp \overset{(3.13)}{=} (G^\perp \cap L^\perp)^\perp$

(iv) $R(A^*) = N(A)^\perp \Leftrightarrow G^\perp + L^\perp \overset{(3.14)}{=} R(A^*) \times Y^* = N(A)^\perp \times Y^* = (N(A) \times \{0\})^\perp \overset{(3.11)}{=} (G \cap L)^\perp$

Nun Satz 3.5 anwenden mit $X = E = X \times Y$, $V = G$, $W = L$.

■

• Die Behauptung (iii) lässt sich so lesen: $Au = f$ ist genau dann lösbar, wenn $\langle v, f\rangle = 0$ für alle $v \in N(A^*)$.

3.17 Satz. *Sei $A : D(A) \subseteq X \to Y$ ein abgeschlossener, linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist surjektiv, d.h. $R(A) = Y$.*

(ii) *Es gibt ein $c > 0$, so dass für alle $y^* \in D(A^*)$:*

$$\|y^*\|_{Y^*} \leq c\|A^*y^*\|_{X^*}$$

(iii) *$N(A^*) = \{0\}$ und $R(A^*)$ ist abgeschlossen.*

Beweis :

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Nach Satz 3.16 ist $R(A) = Y$ genau dann, wenn $R(A^*)$ abgeschlossen ist und $Y = R(A) = N(A^*)^\perp$. Wir müssen also noch zeigen: $Y = N(A^*)^\perp \Leftrightarrow N(A^*) = \{0\}$

"$\Rightarrow$" Sei also $Y = N(A^*)^\perp \Rightarrow \{0\} = Y^\perp = N(A^*)^{\perp\perp} \supseteq N(A^*) \supseteq \{0\} \Rightarrow N(A^*) = \{0\}$

"$\Leftarrow$" $N(A^*) = \{0\} \Rightarrow N(A^*)^\perp = \{0\}^\perp = Y$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Mithilfe von (3.13) und (3.14) folgt

$$G^\perp \cap L^\perp = \{0\} \times N(A^*) = \{(0,0)\}$$

und

$$R(A^*) \times Y^* = G^\perp + L^\perp$$

ist abgeschlossen. Satz 2.8 angewendet auf $V = G^\perp$, $W = L^\perp$ liefert: Es gibt ein $c > 0$, so dass es für alle $z \in G^\perp + L^\perp$ eine Darstellung $z = a + b$ gibt mit $a \in G^\perp$ und $b \in L^\perp$ mit:

$$\|a\| \leq c\|z\|,$$

$$\|b\| \leq c\|z\|.$$

Diese Darstellung ist eindeutig, da $G^\perp \cap L^\perp = \{0\}$.
Für $y^* \in D(A^*)$ setze $z := (A^*y^*, 0) \in R(A^*) \times Y^* = G^\perp + L^\perp$. Es gilt:

$$(A^*y^*, 0) = (A^*y^*, -y^*) + (0, y^*).$$

$L = X \times \{0\} \Rightarrow L^\perp = \{0\} \times Y^* \Rightarrow (0, y^*) \in L^\perp$.
Wir müssen also noch zeigen, dass $(A^*y^*, -y^*) \in G^\perp$. Wir benutzen die Abbildung, die wir in (3.9) definiert haben:

$$J : Y^* \times X^* \to X^* \times Y^* : (y^*, x^*) \mapsto (-x^*, y^*).$$

In Lemma 3.10 haben wir gezeigt, dass

$$J(G(A^*)) = G(A)^\perp = G^\perp$$

Also müssen wir noch zeigen, dass $(A^*y^*, -y^*)$ im Bildbereich von $G(A^*)$ unter der Abbildung J liegt. Sei also $y^* \in D(A^*)$, dann ist auch $-y^* \in D(A^*)$ und $(-y^*, A^*(-y^*)) \in G(A^*)$. Also gilt:

$$J(-y^*, A^*(-y^*)) = (-A^*(-y^*), -y^*) = (A^*y^*, -y^*)$$

Also ist $(A^*y^*, -y^*) \in G^\perp$. Wir haben also eine Darstellung für z gefunden, also gilt mit Satz 2.8:

$$a = (A^*y^*, -y^*),\ b = (0, y^*).$$

$\Rightarrow \|b\| = \|y^*\|_{Y^*} \leq c\|z\| = c\|A^*y^*\|_{X^*}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es gibt ein $c > 0$, so dass für alle $y^* \in D(A^*)$ gilt:

$$\|y^*\| \leq c\|A^*y^*\|$$

Wenn also $y^* \in N(A^*)$ ist, folgt $y^* = 0$ und deshalb $N(A^*) = \{0\}$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $R(A^*)$ abgeschlossen ist. Dazu wählen wir uns eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R(A^*)$ mit $z_n \to z$ in X^*. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $y_n^* \in D(A^*)$ mit $A^*y_n^* = z_n$. Da A^* linear ist, folgt:

$$\|y_n^* - y_m^*\| \leq c\|A^*y_n^* - A^*y_m^*\|.$$

Da die rechte Seite eine Cauchyfolge ist, ist (y_n^*) Cauchyfolge in Y^*, es gibt also ein $y^* \in Y^*$ mit $y_n^* \to y^*$ in Y^*. Mit Lemma 3.8 folgt dann, dass A^* abgeschlossen ist,

$$G(A^*) \ni (y_n^*, A^*y_n^*) \to (y^*, z) \in G(A^*).$$

Also ist $z = A^*y^*$ mit $y^* \in D(A^*)$, also $z \in R(A^*)$.

■

3.18 Satz. *Sei $A : D(A) \subseteq X \to Y$ ein abgeschlossener linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann sind äquivalent:*

(i) *A^* ist surjektiv, d.h. $R(A^*) = X^*$*

(ii) *$\exists\, c > 0\ \forall\, x \in D(A)$:*

$$\|x\| \leq c\|Ax\|$$

(iii) *$N(A) = \{0\}$ und $R(A)$ ist abgeschlossen*

Beweis : analog ■

Beispiel: Wir wollen nun ein Beispiel für einen abgeschlossenen unbeschränkten Operator angeben.
Dazu betrachte wir in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ das (elliptische) Problem

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{d} \partial(a_{ij}(x)\partial_j u(x)) &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.19}$$

mit $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ und $f \in L^2(\Omega)$. Wir wollen untersuchen, wann es eine Lösung u gibt. Dazu definieren wir den Operator $A : D(A) \subseteq L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit $D(A) := W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ durch

$$Au := -\sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) \tag{3.20}$$

$D(A)$ ist dicht in $L^2(\Omega)$, da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ und C_0^∞ eine Unterraum von $D(A)$ ist. A ist offensichtlich linear. Wir wollen auch den adjungierten Operator $A^* : D(A^*) \subseteq (L^2(\Omega))^* \to (L^2(\Omega))^*$ betrachten. Es gilt:

$$v \in D(A^*) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists c > 0 \ \forall\ u \in D(A) : \ |\langle v, Au\rangle| \le c\|u\|_{L^2}$$

Offensichtlich ist $D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (L^2(\Omega))^*$, denn für $v \in L^2(\Omega)$ ist durch

$$\langle v, u\rangle_{L^2} := \int_\Omega uv\,dx\,, \qquad \forall u \in L^2(\Omega)$$

ein stetiges, lineares Funktional auf $L^2(\Omega)$ gegeben. Für $u, v \in D(A)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle v, Au\rangle_{L^2} &= \int_\Omega -\sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u)v\,dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\partial_j u \partial_i v\,dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \sum_{i,j} a_{ij}\partial_j u\, v\, n_i\,ds}_{=0} \\
&= \int_\Omega -\sum_{i,j} u\partial_j(a_{ij}\partial_i v)\,dx \\
&\le \|u\|_{L^2}\|\sum_{i,j} \partial_j(a_{ij}\partial_i v)\|_{L^2}\,.
\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt: $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \subseteq D(A^*)$ und

$$\langle v, Au\rangle = \langle A^*v, u\rangle \qquad u, v \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)\,. \tag{3.21}$$

Interpretation für A^*:

$$\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j(a_{ij}\partial_i v) &= g \qquad \text{in } \Omega \\
v &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass A abgeschlossen ist. Für alle $u \in D(A)$ und $v \in L^2(\Omega)$ gilt

$$\langle v, Au\rangle_{L^2} = \int_\Omega Au\, v\, dx\,. \tag{3.22}$$

Für $u \in D(A)$ setze $Au =: f$ und wähle $v = u$ in (3.22). Dann gilt

$$\int_\Omega f\, u\, dx = \int_\Omega -\sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u)u\, dx = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\partial_j u \partial_i u\, dx\,.$$

Wenn wir für a_{ij} voraussetzen, dass es ein $c_0 > 0$ gibt, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und alle $x \in \Omega$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2\,, \tag{3.23}$$

Dann erhalten wir

$$c_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega f\, u dx \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \overset{\text{Poincare}}{\leq} c\|f\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} &c_0\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2} \Leftrightarrow \\ &\|\nabla u\|_{L^2} \leq c\|f\|_{L^2} = c\|Au\|_{L^2} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Wähle $v = \Delta u = -\sum_{k=1}^d \partial_k^2 u$ in (3.22). Dann folgt:

$$\int_\Omega \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u)\Delta u\, dx = \int_\Omega \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) \sum_k \partial_k^2 u\, dx = -\int_\Omega f\Delta u\, dx$$

Die rechte Seite ist kleiner als

$$\|f\|_{L^2}\|\triangle u\|_{L^2} \leq c\|f\|_{L^2}\|\nabla^2 u\|_{L^2}$$

Für die linke Seite erhalten wir mithilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} \text{linke Seite } &= \int \sum_{i,j,k} \partial_k(a_{ij}\partial_j u)\partial_k\partial_i u\, dx \\ &= \int \sum_{i,j,k} a_{ij}\partial_k\partial_j u\partial_k\partial_i u\, dx + \int \sum_{i,j,k} \partial_k a_{ij}\partial_j u\partial_k\partial_i u\, dx \\ &=: I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Mithilfe von (3.23) erhalten wir

$$I_1 \geq c_0 \int_\Omega |\nabla^2 u|^2 dx\,.$$

Wir bringen I_2 auf die rechte Seite:

$$|I_2| \leq c(\|a_{ij}\|_\infty)\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla^2 u\|_{L^2}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} c_0\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 &\leq c\|f\|_{L^2}\|\nabla^2 u\|_{L^2} + c\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla^2 u\|_{L^2} \\ &\overset{(3.24)}{=} \big(c\|f\|_{L^2} + c\|f\|_{L^2}\big)\|\nabla^2 u\|_{L^2} \\ &= \tilde{c}\|f\|_{L^2}\|\nabla^2 u\|_{L^2}\,. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2} \leq c\,\|f\|_{L^2} = c\,\|Au\|_{L^2}\,. \tag{3.25}$$

Dies zusammen mit (3.24) und der Poincare Ungleichung liefert

$$\|u\|_{W^{2,2}} \leq c\|Au\|_{L^2} \tag{3.26}$$

Um zu zeigen, dass A abgeschlossen ist wählen wir eine Folge $(u_n, Au_n) \to (u, v)$ in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ mit $u_n \in D(A) = W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$. Mit (3.26) folgt dann

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,2}} \leq c\|Au_n - Au_m\|_{L^2}.$$

Da $Au_n \to v$ in $L^2(\Omega)$, ist (u_n) Cauchyfolge in $W^{2,2}(\Omega)$. Dann gibt es ein $\tilde{u} \in W^{2,2}(\Omega)$ mit $u_n \to \tilde{u}$ in $W^{2,2}(\Omega)$ und $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$. Aber wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts $u = \tilde{u}$. Mit dem Spursatz folgt dann $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) = D(A)$. Weiter erhalten wir für alle $\varphi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2} \subset D(A^*)$

$$\langle \varphi, v\rangle \leftarrow \langle \varphi, Au_n\rangle = \langle A^*\varphi, u_n\rangle \to \langle A^*\varphi, u\rangle \overset{u\in D(A)}{=} \langle \varphi, Au\rangle\,.$$

Also folgt $\langle \varphi, v\rangle = \langle \varphi, Au\rangle\ \forall \varphi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2} \subset D(A^*) \Rightarrow v = Au$. Wir haben also gezeigt, dass A abgeschlossen ist.

• Mithilfe von (3.26) und Satz 3.18 haben wir also gezeigt, dass A^* surjektiv ist, d.h. für alle $g \in (L^2)^*$ existiert ein $v \in D(A^*)$ mit $A^* v = g$. Das Problem ist, dass wir $D(A^*)$ nicht charakterisiert haben.

• Man kann für Gebite Ω mit Rand aus C^2 zeigen, dass es Lösungen von $Au = f$ für alle $f \in L^2$ gibt. Dies ist allerdings ein aufwendiger Regularitätssatz. Daraus kann man dann folgern, dass $D(A^*) = D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. Satz 3.26 aus der Vorlesung gilt für solche Gebite, allerdings ist der dortige Beweis nicht richtig.

• $A : X \to Y$ linear, $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$ es gilt:

$$A \text{ surjektiv} \Leftrightarrow A^* \text{ injektiv},$$
$$A \text{ injektiv} \Leftrightarrow A^* \text{ surjektiv},$$

denn da $R(A)$ und $R(A^*)$ endlichdimensional sind, sind sie abgeschlossen, die Behauptung folgt dann, indem man Satz 3.17 und Satz 3.18 anwendet.

• Im Allgemeinen, wenn $\dim X = \dim Y = \infty$ gilt nur:

$$A \text{ surjektiv} \Rightarrow A^* \text{ injektiv}$$
$$A^* \text{ surjektiv} \Rightarrow A \text{ injektiv}$$

Beispiel: $X = Y = \ell^2 := \{(x_n) | \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ $A : x = (x_n) \mapsto (\frac{1}{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$(Ax, y) = \sum\limits_n \frac{1}{n}x_n y_n = (x, Ay) \Rightarrow A = A^*$ (selbstadjungiert).
A und A^* sind natürlich injektiv. Nun wollen wir zeigen, dass sie nicht surjektiv sind:
$Ax = y \Leftrightarrow \frac{1}{n}x_n = y_n \ \forall\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_n = ny_n$ mit $(x_n), (y_n) \in \ell^2$. Wähle nun $y_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} \in \ell^2$, da $\sum \frac{1}{(n^{\frac{3}{4}})^2} = \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \infty$. Also $x_n = ny_n = \frac{n}{n^{\frac{3}{4}}} = n^{\frac{1}{4}}$, aber $\sum n^{\frac{1}{4}} = \infty \Rightarrow (x_n) \notin \ell^2$.
A ist also injektiv aber nicht surjektiv.

3.27 Satz. *Sei $A : D(A) \subseteq X \to Y$ ein abgeschlossener, linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $D(A) = X$,

(ii) *A ist beschränkt,*

(iii) $D(A^*) = Y^*$,

(iv) *A^* ist beschränkt.*

Falls eine der Bedingungen (i) – (iv) *erfüllt ist, gilt:*

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \|A^*\|_{L(Y^*,X^*)} \tag{3.28}$$

Beweis :

(i) ⇒ (ii) $A : D(A) = X \to Y$. A ist abgeschlossen genau dann, wenn $G(A)$ abgeschlossen ist. Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (Satz 2.7) folgt, dass A beschränkt ist.

(ii) ⇒ (iii)

$$D(A^*) = \{y^* \in Y^* \,\big|\, |\langle y^*, Ax\rangle| \le c\|x\|_X \;\forall\, x \in D(A)\}$$

Sei also $y^* \in Y^*$. Dann ist

$$|\langle y^*, Ax\rangle| \le \|y^*\|_{Y^*}\|Ax\|_Y \le \underbrace{\|y^*\|_{Y^*}\|A\|}_{=:c}\|x\|_X,$$

das heißt $y^* \in D(A^*)$.

(iii) ⇒ (iv) Aus Lemma 3.8 folgt, dass A^* abgeschlossen ist. Also ist nach Definition auch $G(A^*)$ abgeschlossen $\overset{\text{Satz 2.7}}{\Rightarrow}$ A^* ist beschränkt.

(iv) ⇒ (i) Wir zeigen zuerst, dass $D(A^*)$ abgeschlossen ist:
Betrachte $y_n^* \to y^*$ in Y^*, $(y_n^*) \subseteq D(A^*)$. Da A^* stetig ist, gilt

$$\|A^*(y_n^* - y_m^*)\| \le \|A^*\|\|y_n^* - y_m^*\| \to 0.$$

Also ist $(A^*y_n^*)$ eine Cauchyfolge in X^* und da X^* vollständig ist, konvergiert $A^*y_n^*$ gegen ein Element $x^* \in X^*$. Also ist

$$(y_n^*, A^*y_n^*) \to (y^*, x^*) \text{ in } Y^* \times X^*.$$

Da A^* ein adjungierter Operator ist, ist $G(A^*)$ abgeschlossen, d.h. $(y^*, x^*) \in G(A^*)$ und somit ist $y^* \in D(A^*)$ und $x^* = A^*y^*$, d.h. $D(A^*)$ ist abgeschlossen.

Betrachte nun $E := X \times Y$, $G := G(A) \subseteq E$, $L := \{0\} \times Y \subseteq E$. Dann folgt analog zu (3.11) bis (3.14)

$$G + L = D(A) \times Y$$
$$G^\perp + L^\perp = X^* \times D(A^*)$$

mit

$$L^\perp = X^* \times \{0\}$$
$$G^\perp = \{(x^*, y^*) \in X^* \times Y^* \,\big|\, \forall\, x \in D(A) \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, Ax\rangle = 0\}$$

Die erste Gleichheit ist klar, wir müssen also nur noch die zweite zeigen. Sei $(x^*, y^*) \in G^\perp \Rightarrow \|x^*\|\|x\| \geq |\langle x^*, x\rangle| = |\langle y^*, Ax\rangle| \;\Rightarrow y^* \in D(A^*)$. Sei umgekehrt $y^* \in D(A^*) : \exists\, c > 0\, \forall\, x \in D(A)\, |\langle y^*, Ax\rangle| \leq c\|x\|$, d.h. es gibt ein $x^* \in X : \langle y^*, Ax\rangle = \langle -x^*, x\rangle \Rightarrow (x^*, y^*) \in G^\perp$.
$D(A^*)$ und X^* sind abgeschlossen, d.h. $G^\perp + L^\perp$ ist abgeschlossen. Mit Satz 3.5 folgt für $V = G$, $W = L$, dass $G + L$ abgeschlossen in E ist. Also ist $D(A)$ abgeschlossen, aber $\overline{D(A)} = X$, d.h. $D(A) = X$.

ad (3.28) Aus der Definition des adjungierten Operators wissen wir, dass $\forall\, x \in X$ und $\forall\, y^* \in Y^*$ gilt:

$$\langle y^*, Ax\rangle = \langle A^* y^*, x\rangle,$$

daraus folgt $|\langle y^*, Ax\rangle| = |\langle A^* y^*, x^*\rangle| \leq \|A^* y^*\|\|x\| \leq \|y^*\|\|A^*\|\|x\|$. Damit können wir jetzt Gleichung (3.28) beweisen.

„ $\leq$ “ $\|Ax\|_Y \overset{\text{Kapitel } 1.2\,(1.11)}{=} \sup\limits_{\|y^*\|\leq 1} |\langle y^*, Ax\rangle| \leq \|A^*\|\|x\|$

$\Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \|A^*\|$

„ $\geq$ “

$$\begin{aligned}
\|A^* y^*\| &\overset{Def}{=} \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle A^* y^*, x\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle y^*, Ax\rangle| \\
&\leq \|y^*\|\|A\|\|x\| \\
&\leq \|y^*\|\|A\|
\end{aligned}$$

Also ist $\|A^*\| = \sup\limits_{\|y^*\|\leq 1} \|A^* y^*\| \leq \|A\|$ und damit folgt $\|A\| = \|A^*\|$.

■