

# Kapitel 0

## Einführung und Begriffe

### 0.1 Einführung

Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit *unendlich-dimensionalen* Vektorräumen (über  $\mathbb{R}$ ), in denen ein *Konvergenzbegriff* (Topologie) gegeben ist, sowie den Abbildungen zwischen ihnen. Besonders angestrebt sind Ergebnisse, die sich auf konkrete Funktionenräume (z.B.  $C[a, b]$ ,  $L^2(\Omega)$  etc.) und konkrete Gleichungen (z.B. Integralgleichungen oder partielle Differentialgleichungen) anwenden lassen.

Die Betrachtungsweise der Funktionalanalysis, Funktionen als Punkte in einem unendlich-dimensionalen Raum aufzufassen und geometrische Überlegungen u.ä. anzuwenden, hat sich als sehr fruchtbar erwiesen und zu einer enormen Bereicherung der Analysis geführt. Die Sätze der Funktionalanalysis sind sehr allgemein und geben ein tieferes Verständnis zahlreicher Zusammenhänge.

Die Funktionalanalysis ist ein Produkt des 20. Jahrhunderts. Der Name kommt von dem Wort „Funktional“. Ein *lineares Funktional* ist eine lineare Abbildung eines Vektorraumes in seinen Grundkörper. Ist dieser Vektorraum selbst ein Funktionenraum, so sind die Argumente des Funktionals Funktionen. Um nicht von einer Funktion von Funktionen zu sprechen, verwendeten unsere Vorfahren das Wort „Funktional“. (Heute würde man sich daran weniger stören.) Da in den Anwendungen der Funktionalanalysis viel mit solchen Abbildungen - also Funktionen von Funktionen, letztere aufgefaßt als Punkte eines Vektorraumes - gearbeitet wird, erklärt sich auf diese Weise der Name „Funktionalanalysis“.

Ein größeres Teilgebiet der Funktionalanalysis ist die *lineare Funktionalanalysis*. Sie befaßt sich z.B. mit der Lösbarkeit von linearen Gleichungen  $Au = f$  oder Eigenwertproblemen (Spektraltheorie). Ein anderes wichtiges Teilgebiet ist die *nichtlineare Funktionalanalysis*, die sich z.B. mit Fixpunktsätzen, mehrdeutiger Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen  $A(u) = f$  etc. befaßt.

In der Funktionalanalysis, welche mit *unendlich-dimensionalen* Vektorräumen arbeitet, gibt es viele, im Vergleich zur Analysis im  $\mathbb{R}^n$  ungewohnte Effekte. Wir zählen einige von diesen auf:

**a) Surjektive lineare Abbildungen können einen nichttrivialen Kern haben.**

Beispiel: Sei  $V = \{ (c_1, c_2, c_3, \dots) \mid c_j \in \mathbb{R} \}$  der unendlich-dimensionale Vektorraum mit der komponentenweisen Addition als additiver Verknüpfung und der komponentenweise Multiplikation mit Skalaren  $\alpha \in \mathbb{R}$  als Skalarmultiplikation. (Man könnte  $V = \mathbb{R}^\infty$  oder besser  $\mathbb{R}^\omega$  schreiben.) Die lineare Abbildung  $A : V \rightarrow V$  sei definiert durch

$$Ac = (c_2, c_3, c_4, \dots), \quad c = (c_1, c_2, c_3, \dots).$$

Offensichtlich ist  $A(V) = V$ , aber  $A(c_1, 0, 0, \dots) = (0, 0, \dots)$ .

**b) Ist der Kern  $N(A)$  einer linearen Abbildung trivial, so ist  $A$  nicht notwendig surjektiv.**

Beispiel:  $V$  sei wieder wie oben definiert. Es sei  $Ac = (0, c_1, c_2, c_3, \dots)$ . Aus  $Ac = 0$  folgt  $c = 0$ , also  $N(A) = 0$ . Offensichtlich ist aber  $A(V)$  echter Teilraum von  $V$ .

Die in a) und b) beobachteten Effekte können im endlich-dimensionalen Fall nicht eintreten.

Man bemüht sich in der Funktionalanalysis, durch Zusatzbedingungen an  $A$  die im  $\mathbb{R}^n$  bekannten Sätze zu retten.

**c) Lineare Abbildungen - selbst einfachster Art - müssen keinen Eigenwert haben.**

Beispiel:  $C[a, b] =$  Raum der  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -wertigen stetigen Funktionen auf  $[a, b]$ . Sei  $A$  diejenige lineare Abbildung, welche definiert ist durch

$$(Af)(x) = (\sin x) \cdot f(x), \quad f \in C[a, b], \quad x \in [a, b].$$

$A$  ist also ein sehr simpler Operator, nämlich ein *Multiplikationsoperator* - die Multiplikation mit  $\sin x$ .

$A$  hat *keinen* Eigenwert. Andernfalls existiert  $f \in C[a, b], f \neq 0$  (d. h.  $f$  ist nicht die Null-Funktion) und  $\lambda \in \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) mit  $(\sin x)f(x) = \lambda f(x)$ . Da  $f \neq 0$ , existiert ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x) \neq 0$  für  $x \in U(x_0)$  und es gilt

$$\sin x = \lambda = \text{const}, \quad x \in U(x_0).$$

Dies ist nicht möglich,  $\sin \neq \text{const}$  auf einer offenen Menge.

In der Funktionalanalysis gibt man Klassen von linearen Operatoren (= Abbildungen) an, für die das Eigenwertproblem ähnlich wie bei  $n \times n$ -Matrizen behandelt werden kann. Außerdem werden verschiedene Abschwächungen des Begriffs „Eigenwert“ eingeführt, um eine Analogie zu  $n \times n$ -Matrizen zu bekommen. Zudem sind diese Abschwächungen durch die Quantenphysik motiviert. Hiermit beschäftigt sich die „Spektraltheorie“.

**d) In unendlich-dimensionalen Räumen gibt es häufig mehrere natürliche Konvergenzbegriffe.**

Im  $\mathbb{R}^n$  gibt es außer der euklidischen Metrik natürlich noch beliebig viele andere Metriken - diese sind aber alle äquivalent.

Beispiel:  $V = l^2 = \{ (c_1, c_2, c_3, \dots) \mid \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty \}$ .

Man hat die punktweise Konvergenz

$$c^j \rightarrow c \Leftrightarrow c_i^j \rightarrow c_i \quad (j \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Ferner gibt es die starke  $l^2$ -Konvergenz

$$c^j \rightarrow c \Leftrightarrow \|c^j - c\|_{l^2} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty).$$

Hierbei ist  $\|\omega\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k|^2)^{1/2}$ .

Schließlich kennt man noch die schwache  $l^2$ -Konvergenz, die wir später kennenlernen.

Die drei Konvergenzen sind *nicht* äquivalent.

**e) Lineare Abbildungen sind nicht notwendig stetig.**

Sei  $V$  der Vektorraum der Polynome auf  $[-2, 2]$ , versehen mit der *gleichmäßigen Konvergenz* als Konvergenzbegriff, d.h.  $p^j \rightarrow p \Leftrightarrow \|p^j - p\|_{\infty} \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Hierbei ist  $\|q\|_{\infty} = \max \{ |q(x)| \mid x \in [-2, 2] \}$ .

Wir definieren die lineare Abbildung  $A : V \rightarrow V$ , indem wir sie auf den Basiselementen  $x^n$  definieren:

$$Ax^n = 3^n x^n.$$

Mit  $p_n(x) = \frac{1}{(2,5)^n} x^n$  gilt  $p_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), aber

$$\|Ap_n(x)\| = \frac{3^n \cdot 2^n}{(2,5)^n} \rightarrow \infty.$$

Die stetigen linearen Abbildungen und Klassen von unstetigen linearen Abbildungen werden in der Funktionalanalysis besonders studiert.

Schließlich betonen wir noch, daß man auch das Studium konkreter Funktionenräume zur Funktionalanalysis zählen kann, wenn auch die Grenzen fließend sind. Es gibt zahllose Funktionenräume in der Analysis. Der Anfänger kennt vermutlich die Räume  $C[a, b]$ ,  $C^1$ ,  $C^m$ ,  $C^\infty$ ,  $C^\alpha$ ,  $L^2(\Omega)$ ,  $L^p(\Omega)$ . Man benötigt die vielen Funktionenräume u.a., um Sätze der Funktionalanalysis einer konkreten Situation anzupassen.

## 0.2 Räume und Operatoren

- Wir betrachten einen Vektorraum über  $\mathbb{R}$
- Ein Vektorraum  $V$  ist normiert, wenn es eine Norm  $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$  gibt.  $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Norm  $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in V \forall \lambda \in \mathbb{R}$ :
- (N1) positiv definit, d.h.  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (N2) positiv homogen, das heißt  $\|\lambda x\|_V = |\lambda| \|x\|_V$
- (N3) Dreiecksungleichung  $\|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V$

- **Beispiele:**

- $\mathbb{R}^n (x_1, \dots, x_n) = x$

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

- $L^p(\Omega)$

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

- Konvergenz in  $(V, \|\cdot\|)$ : Folge  $(x_n)$  konvergiert (stark) gegen  $x \in V$  genau dann, wenn  $\|x^n - x\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$ . Man schreibt  $x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$
- Cauchyfolge  $(x_n) \subseteq V \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, k \geq n_0 : \|x_n - x_k\| \leq \varepsilon$
- Ein normierter Vektorraum heißt vollständig genau dann, wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert hat. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum (B-Raum).

- **Beispiele**

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$

- $(L^p, \|\cdot\|_p)$

• Skalarprodukt auf Vektorraum  $V$  ist Abbildung  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\forall x, y, z \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

(S1) bilinear, das heißt  $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

(S2) symmetrisch:  $(x, y) = (y, x)$

(S3) positiv definit, das heißt  $(x, x) \geq 0$  und  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• induzierte Norm  $\|x\|_H := (x, x)^{\frac{1}{2}}$

• **Beispiele:**

$$- (\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot)) (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$- (L^2(\Omega), (\cdot, \cdot)) (f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

• Falls  $H$  mit der induzierten Norm  $\|\cdot\|_H$  vollständig ist, nennen wir ihn Hilbertraum.

•  $X, Y$  normierte Vektorräume. Abbildungen  $A : X \rightarrow Y$  heißen Operatoren.

• Ein Operator  $A : X \rightarrow Y$  heißt

<u>beschränkt</u>	$\Leftrightarrow$	$A$ beschränkte Mengen in $X$ in beschränkte Mengen in $Y$ abbildet
<u>linear</u>	$\Leftrightarrow$	$\forall x, y \in X \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt: $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$
<u>stetig in <math>x_0</math></u>	$\Leftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X :$ $\ x - x_0\ _X < \delta \Rightarrow \ Ax - Ax_0\ _Y < \varepsilon$
<u>stetig</u>	$\Leftrightarrow$	$A$ ist stetig für alle $x_0 \in X$

• man kann zeigen (Übung):

i)  $A : X \rightarrow Y$  linear und beschränkt  $\Rightarrow \exists K > 0 \forall x \in X:$

$$\|Ax\|_Y \leq K\|x\| \tag{2.1}$$

wobei  $K = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$

ii)  $A : X \rightarrow Y$  linear.  $A$  ist beschränkt  $\Leftrightarrow A$  ist stetig

• Raum der beschränkten, linearen Operatoren  $A : X \rightarrow Y$  wird mit  $L(X, Y)$  bezeichnet.

• Durch

$$\|A\|_{L(X, Y)} := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad (2.2)$$

ist auf  $L(X, Y)$  eine Norm gegeben, die Operatornorm (kurz  $\|A\|$ ).

**2.3 Lemma.** *Seien  $X, Y$  Banachräume. Dann ist  $L(X, Y)$  ein Banachraum.*

BEWEIS :

- $A, B \in L(X, Y)$   
 $\|(A + B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$   
 $\Rightarrow A + B \in L(X, Y) \quad \& \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$   
 $\Rightarrow L(X, Y)$  ist normierter Vektorraum, da die anderen Bedingungen trivial sind.

- Sei  $(A_k) \subseteq L(X, Y)$  Folge von Operatoren,  $(A_k)$  sei Cauchyfolge, d.h.  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n, k \geq n_0 : \|A_k - A_n\|_{L(X, Y)} < \varepsilon$   
Für  $x \in X$  ist  $(A_k x)$  Folge in  $Y$  und es gilt:  
 $\|A_k x - A_n x\| = \|(A_k - A_n)x\| \leq \|A_k - A_n\| \|x\| < \varepsilon < \|x\|$   
 $\Rightarrow (A_k x) \subseteq Y$  Cauchyfolge  
 $\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k x =: Ax$   
 $\Rightarrow A : X \rightarrow Y$  linear, da  $A_k$  linear.  $A_k$  beschränkt?

$$\|(A - A_n)x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|(A_k - A_n)x\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A_n\| \|x\| < K \|x\| < \infty,$$

falls  $n, k \geq n_0$

$\Rightarrow A - A_n \in L(X, Y)$

$\Rightarrow A = \underbrace{A - A_n}_{\text{lin. beschr.}} + \underbrace{A_n}_{\text{lin. beschr.}}$

$\Rightarrow A$  ist beschränkt

zz:  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  in Operatornorm.

$\|A - A_n\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A_n\| \leq \varepsilon$  da Cauchyfolge

$\Rightarrow \|A - A_n\|_{L(X, Y)} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$ , d.h. der punktweise Grenzwert ist auch der Grenzwert in der Operatornorm.

■

- Der Dualraum  $X^*$  eines Banachraums  $X$  ist gerade  $L(X, \mathbb{R})$ , d.h. die Menge der linearen, beschränkten Funktionale  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Vershen mit der Operatornorm ist  $X^*$  ein Banachraum.

Für  $f \in X^*, x \in X$  schreibt man

$$\langle f, x \rangle_{X^*, X} = \langle f, x \rangle_X = \langle f, x \rangle := f(x)$$

man nennt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*, X}$  das Dualitätsprodukt zwischen  $X$  und  $X^*$ .

- Ein metrischer Raum ist eine Menge  $M$  versehen mit einer Abstandsfunction  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , welche für alle  $x, y, z \in M$  folgende Eigenschaften besitzt:

(M1) positiv definit, d.h.  $d(x, y) \geq 0$  und es gilt  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) symmetrisch, d.h.  $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) Dreiecksungleichung, d.h.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

- Verallgemeinerung des Abstandes im  $\mathbb{R}^n$

- **Beispiele**

-  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$   $d(x, y) = \|x - y\|_p$

- normierte Räume

- offener Ball  $B_r(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$

- Menge  $A \subseteq M$  heißt offen  $\Leftrightarrow \forall x \in A \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A$

- Folge  $(x_n) \subseteq M$  konvergiert gegen  $x \in M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 :$   
 $\forall n \geq n_0 d(x_n, x_0) < \varepsilon$

Man schreibt  $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$

- Cauchyfolge, Vollständigkeit  
 ersetze Norm  $\rightarrow$  Abstand

- Kompaktheit von Mengen  $A \subseteq M$

- (i) folgenkompakt  $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq A \exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n) \exists x \in A : x_{n_k} \rightarrow x$   
 $k \rightarrow \infty$



(ii) überdeckungskompakt  $\Leftrightarrow$  jede offene Überdeckung von  $A$  enthält eine endliche Teilüberdeckung, d.h. sei  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $U_\lambda$  offen derart:  $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$$

(iii) präkompakt  $\Leftrightarrow \exists$  endliches  $\varepsilon$ -Netz, d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_n \in A :$

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$$

**2.4 Satz.** In einem metrischen Raum  $(M, d)$  sind äquivalent:

(i)  $A \subseteq M$  ist überdeckungskompakt

(ii)  $A$  ist folgenkompakt

(iii)  $A$  ist präkompakt und vollständig

BEWEIS : (i)  $\Rightarrow$  (ii) durch Widerspruch:

Ann.:  $\exists (x_n)$  s.d.  $\forall (x_{n_k}) \subseteq (x_n)$  gilt  $x_{n_k} \not\rightarrow$ , d.h.  $\forall y \in A \exists r_y > 0$  mit:

$$N_y := \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in B_{r_y}(y) \cap A\} \text{ endlich}$$

$A \subseteq \bigcup_{y \in A} B_{r_y}(y)$  ist offene Überdeckung, also gibt es  $y_1, \dots, y_n$ , so dass

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r_{y_i}}(y_i)$ . Also ist  $\bigcup_{i=1}^n N_{y_i}$  endlich.

Da aber  $(x_n) \subseteq A$  folgt Widerspruch, da dann  $\bigcup_{i=1}^n N_{y_i}$  eine Überdeckung der natürlichen Zahlen wäre.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii):

- $A$  vollständig

$(x_n) \subseteq A$  Cauchyfolge  $\stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n) : x_{n_k} \rightarrow x \in A$   
 $\Rightarrow x_n \rightarrow x$ , denn:

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{< \varepsilon, \text{ da Cauchyfolge}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{< \varepsilon \text{ für } n_k \text{ groß}} < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow A$  ist vollständig. Noch zz:  $A$  ist präkompakt.

- $A$  ist präkompakt. Durch Widerspruch:

Wir konstruieren ein endliches  $\varepsilon$ -Netz, indem wir induktiv eine Folge  $(x_n)$  konstruieren:

$$\varepsilon > 0 \quad x_1 \in A \quad B_\varepsilon(x_1) \not\supseteq A \quad x_{k+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x_i)$$

$\Rightarrow (x_k)$  besitzt keine konvergente Teilfolge, da alle Folgenglieder einen Abstand größer als  $\varepsilon$  haben.

(iii)  $\Rightarrow$  (i)

Sei  $(U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $A$ .

$$\mathcal{A} := \{B \subseteq A \mid J \subseteq I : B \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i \Rightarrow J \text{ unendlich}\}$$

$\mathcal{A}$  sind alle Teilmengen von  $A$ , die keine endliche Überdeckung haben, also zeigen wir:  $A \notin \mathcal{A}$ :

$A$  ist präkompakt, d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1^\varepsilon, \dots, x_{n_\varepsilon}^\varepsilon$ , so dass  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(x_i^\varepsilon)$

Außerdem gilt für  $B \in \mathcal{A}$ , dass es ein  $i \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$  gibt mit  $B \cap B_\varepsilon(x_i^\varepsilon) \in \mathcal{A}$ .

Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass  $A \in \mathcal{A}$ .

Wir konstruieren eine Folge  $(x_n)$ : Wähle  $\varepsilon = 1/k$

$$\varepsilon = 1 \exists x_1 : B_1 := B_1(x_1) \cap A \in \mathcal{A}$$

$$\varepsilon = 1/2$$

$\vdots$

$$\varepsilon = 1/k$$

$$\Rightarrow B_m := \bigcap_{k=1}^m B_{\frac{1}{k}}(x_k) \cap A \in \mathcal{A}$$

Wähle  $y_m \in B_m$ , dann sind für  $l \geq m$   $y_m, y_l \in B_{\frac{1}{m}}(x_m)$

$$\stackrel{\Delta-Ugl}{\Rightarrow} d(y_m, y_l) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, y_l) \leq \frac{2}{m}$$

$\Rightarrow (y_m)$  ist Cauchyfolge

$A$  vollständig  $\Rightarrow \exists y \in A : y_m \rightarrow y \quad m \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \underbrace{d(y_m, y)}_{=: \varepsilon_m} \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty$$

$y \in A$  und  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 : y \in U_{i_0}$  offen, d.h. wenn  $m$  groß genug ist,

$$\text{gilt } U_{i_0} \supseteq B_{\frac{2}{m} + \varepsilon_m}(y) \supseteq B_{\frac{2}{m}}(y_m) \supseteq B_{\frac{1}{m}}(x_m) \supseteq B_m$$

$\Rightarrow U_{i_0} \supseteq B_m \quad B_m \in \mathcal{A}$  Widerspruch weil  $U_{i_0}$  endlich. ■

• Metrischer Raum  $(M, d)$ , System der offenen Mengen erfüllt:

- beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen
- endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind offen
- $M, \emptyset$  offen

- topologischer Raum

$X$  Menge,  $\tau$  System von Teilmengen von  $X$ , d.h.  $\tau \subseteq 2^X$  erfülle:

(T1)  $X \in \tau, \emptyset \in \tau$

(T2) Vereinigungen beliebiger Familien von Mengen aus  $\tau$  liegen wieder in  $\tau$

(T3) endliche Durchschnitte von Mengen aus  $\tau$  liegen wieder in  $\tau$

Das System  $\tau$  heißt Topologie.  $(X, \tau)$  heißt topologischer Raum.  
Elemente aus  $\tau$  heißen offene Mengen.

- **Beispiele**

- $(M, d)$  metrischer Raum mit  $\tau =$  System aller offenen Mengen
- $\mathbb{R}, |\cdot|$   $\tau =$  System aller offenen Mengen
- $X, \tau = \{\emptyset, X\}$  chaotische Topologie
- $X, \tau = 2^X$  diskrete Topologie

Problem:

chaotische Topologie:  $x \neq y \neg(\exists U, V \in \tau, x \in U, y \in V \quad U \cap V = \emptyset)$

- $(X, \tau)$  heißt Hausdorffraum : $\Leftrightarrow \forall x, y \in X \quad x \neq y \exists U, V \in \tau : x \in U \quad y \in V \quad U \cap V = \emptyset$

- Im Weiteren sind alle topologischen Räume Hausdorff-Räume!

- Vergleich von Topologien

$(X, \tau_i) \quad i = 1, 2$  Topologien,  $\tau_1 \subseteq \tau_2$ , dann:  $\tau_2$  ist feiner als  $\tau_1$  bzw.  $\tau_1$  ist gröber als  $\tau_2$

- $A \subseteq X$  heißt abgeschlossen  $\Leftrightarrow X \setminus A$  offen (d.h.  $X \setminus A \in \tau$ )

- $V \subseteq X$  heißt Umgebung von  $x \in V \Leftrightarrow \exists U \in \tau : x \in U \subseteq V$

- Umgebungsbasis eines Punktes  $x \in X$  ist ein System  $(V_i)_{i \in I}$  von Umgebungen von  $x$ , so dass für beliebige Umgebungen  $V$  von  $x$  ein  $i \in I$  existiert, so dass  $V_i \subseteq V$  ist.

- **Beispiel**  $(M, d)$  metrischer Raum

$x \in M : (B_{\frac{1}{k}}(x))_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Umgebungsbasis

• Eine Topologie lässt sich auch über Umgebungssysteme konstruieren.  
 $x \in X \rightarrow$  System  $V(x)$  von Umgebungen

(U1)  $\forall V \in V(x) : x \in V$

(U2)  $V \in V(x); M \supseteq V \Rightarrow M \in V(x)$

(U3)  $V_1, V_2 \in V(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in V(x)$

(U4)  $\forall V \in V(x) \exists W \in V(x) : \forall y \in W$  gilt  $V \in V(y)$

• Elemente von  $V(x)$  heißen Umgebungen von  $x$

•  $U \subseteq X$  ist offen  $\Leftrightarrow \forall x \in U : U \in V(x)$

• Manchmal ist es einfacher, Topologien über Umgebungen oder Umgebungsbasen zu charakterisieren.

•  $x \in M$  heißt innerer Punkt von  $M \subseteq X \Leftrightarrow \exists V \in V(x) : V \subseteq M$

•  $x \in X$  ist Randpunkt von  $M \subseteq X \Leftrightarrow \forall V \in V(x) : V \cap M \neq \emptyset, V \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$

• Rand  $\partial M := \{x \in X \mid x \text{ ist Randpunkt von } M\}$

Innere  $\text{int}(M) = M =: \{x \in M \mid x \text{ ist innerer Punkt von } M\}$

Abschluss  $\overline{M} := M \cup \partial M = \text{int}M \cup \partial M$

• Menge  $N$  heißt dicht in  $M \Rightarrow \overline{N} = M$

•  $X$  heißt separabel  $\Leftrightarrow$  es eine dicht abzählbare Menge in  $X$  gibt.

•  $A \subseteq M \subseteq X$  heißt relativ offen in  $M \Leftrightarrow \exists U \in \tau : A = U \cap M$   
 (analog relativ abgeschlossen)

• Relativtopologie  $M \subseteq X$

$$\tau/M = \{A \subseteq M \mid \exists U \in \tau : A = U \cap M\}$$

•  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$

$f$  heißt stetig in  $x \in X$   $\Leftrightarrow$  für alle Umgebungen  $V(f(x)) \subseteq Y$  von  $f(x)$ , so dass es eine Umgebung  $V(x) \subseteq X$  von  $x$  gibt, so dass  $f(V(x)) \subseteq V(f(x))$

- $f : X \rightarrow Y$  stetig  $\Leftrightarrow f$  ist stetig  $\forall x \in X$

**2.5 Lemma.**  $f : X \rightarrow Y$  ( $X, \tau$ ), ( $Y, \tau$ ) *topologische Räume. Es sind äquivalent:*

- (i)  $f$  ist stetig
- (ii) Die Urbilder offener Mengen sind offen
- (iii) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen

BEWEIS : Übung ■

- $K \subseteq X$  heißt kompakt  $\Leftrightarrow$  aus jeder offenen Überdeckung von  $K$  kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d.h.

$$K \subseteq \bigcup_{i \geq 1} U_i \quad U_i \in \tau$$

$$\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n : K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$$

- $K \subseteq X$  heißt relativ kompakt  $\Leftrightarrow \overline{K}$  kompakt

**2.6 Lemma.** Sei  $K \subseteq X$  kompakt. Dann gilt:

- (i)  $K$  ist abgeschlossen.
- (ii) Jede Teilmenge  $M$  von  $K$  ist relativ kompakt.

BEWEIS :

zu (i):  $K$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow X \setminus K$  offen

Sei  $x_0 \in X \setminus K \Rightarrow \forall y \in K \exists U_y, V_y \in \tau : x_0 \in V_y \quad y \in U_y \quad U_y \cap V_y = \emptyset$   
(Hausdorff)

$$K \subseteq \bigcup_{y \in K} U_y \Rightarrow \exists y_1 \dots y_n \in K : K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{y_i} =: U$$

$$\Rightarrow x_0 \in \bigcap_{i=1}^n V_{y_i} =: V \text{ ist offen, da } V_{y_i} \text{ offen}$$

$$U \cap V = \emptyset \Rightarrow V \subseteq X \setminus K \Rightarrow X \setminus K \text{ ist offen.}$$

zu (ii):  $M \subseteq K \quad \overline{M}$  kompakt?

$$\text{Sei } \overline{M} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \quad U_i \in \tau \quad K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \cup X \setminus M$$

Dann benutze  $K$  kompakt. ■

- Folge  $(x_n) \subseteq X$  konvergiert gegen  $x \in X \Leftrightarrow$  es für alle Umgebungen  $V(x)$  von  $x$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit:  $\forall n \geq n_0 \quad x_n \in V(x)$

Symbol:  $x_n \rightarrow x \quad n \rightarrow \infty$

- $f : X \rightarrow Y$  heißt folgenstetig  $\Leftrightarrow \forall$  Folgen  $(x_n) \subseteq X$  mit  $x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$   
 $\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \quad n \rightarrow \infty$

- In topologischen Räumen sind Stetigkeit und Folgenstetigkeit nicht identisch!

In metrischen Räumen sind die Begriffe äquivalent (Bew: ÜA), in topologischen Räumen mit abzählbarer Umgebungsbasis auch.

- Es gibt topologische Räume:  $K$  kompakt  $\not\Rightarrow$  folgenkompakt  
 Čech-Stone-Kompaktifizierung von  $\mathbb{N}$

- Es gibt Kriterien mit denen aus Folgenkompaktheit Kompaktheit folgt.

- Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow$  Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$