Kapitel 3

Schwache Topologie und reflexive Räume

3.1 Konstruktion von Topologien

Sei X ein Vektorraum und seien $(Y_i)_{i \in I}$ topologische Räume. Für alle $i \in I$ seien $\varphi_i : X \to Y_i$ Abbildungen. Wir suchen die *gröbste* Topologie τ auf X, so daß alle φ_i stetig sind, d.h. die Topologie, die am wenigsten offene Mengen enthält. Seien $\omega_i \subseteq Y_i$ offene Megen, dann sind notwendigerweise alle $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ Elemente von τ.
Wir bezeichnen die Familie aller solcher Mengen mit $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Wir suchen nun das kleinste Mengensystem τ, daß $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ enthält und abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte und beliebiger Vereinigungen ist. Dazu bilden wir *zuerst* alle möglichen endlichen Durchschnitte von Mengen aus $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, d.h. $\bigcap\limits_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda, \Gamma \subseteq \Lambda, \Gamma$ endlich. Dieses System bezeichnen wir mit Φ. Danach bilden wir beliebige Vereinigungen von Mengen aus Φ. Dieses neue System sei $\mathcal{F}$. Es ist klar, daß $\mathcal{F}$ abgeschloßen bzgl. beliebigen Vereinigungen ist. Es ist nicht völlig offenschichtlich, daß $\mathcal{F}$ auch abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte ist. Aber es gilt:

1.1 Lemma. *Das System $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte.*

Beweis : Übungsaufgabe aus der Mengentheorie. ■

Somit ist die gesuchte gröbste Topologie τ gegeben durch endliche Durchschnitte von Mengen der Form $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$, ω_i offen in Y_i, und beliebigen Vereinigungen solcher Mengen. In Termen von Umgebungen ausgedrückt heißt dies: sei $x \in X$, dann ist eine Umgebungsbasis von x bzgl. τ gegeben durch endliche Durchschnitte der Form $\varphi_i^{-1}(V_i)$, V_i Umgebung von $\varphi_i(x_i)$ in Y_i.
Die Konvergenz von Folgen in der Topologie τ ist vollständig durch die Abbildungen φ_i, $i \in I$ charakterisiert.

1.2 Lemma. *Sei (x_n) eine Folge in X. Die Folge x_n konvergiert gegen $x \in X$ bzgl. τ genau dann, wenn $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ für alle $i \in I$.*

Beweis : Aus $x_n \to x$ bzgl. τ folgt sofort $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, da alle φ_i bzgl. τ stetig sind. Umgekehrt sei U eine Umgebung von x. Aufgrund der Konstruktion von τ können wir annehmen, dass U die Form $U = \bigcap_{i \in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$, $J \subset I$, J endlich, V_i Umgebung von $\varphi_i(x)$ in Y_i. Für alle $i \in J$ existiert ein N_i mit $\varphi_i(x_n) \in V_i$ für alle $n \geq N_i$. Sei $N = \max N_i$. Dann ist $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. ∎

1.3 Lemma. *Sei (Z, σ) ein topologischer Raum und $\psi : (Z, \sigma) \to (X, \tau)$ eine Abbildung. Dann ist ψ stetig genau dann, wenn für alle $i \in I$ die Abbildung $\varphi_j \circ \psi : (Z, \sigma) \to (Y_i, \sigma_i)$ stetig ist.*

Beweis :

"⇒" ψ und φ_i sind stetig, also ist auch $\psi \circ \varphi$ stetig.

"⇐" Sei $U \subseteq X$ offen, d.h. $U \in \tau$. U lässt sich also schreiben als:

$$U = \bigcap_{\text{beliebig}} \bigcup_{\text{endlich}} \varphi_i^{-1}(\omega_i), \qquad \omega_i \in \sigma_i.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(U) &= \psi^{-1}\Big(\bigcap_{\text{beliebig}} \bigcup_{\text{endlich}} \varphi_i^{-1}(\omega_i)\Big) \\ &= \bigcap_{\text{beliebig}} \bigcup_{\text{endlich}} \psi^{-1}\varphi_i^{-1}(\omega_i) \\ &= \bigcap_{\text{beliebig}} \bigcup_{\text{endlich}} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(\omega_i). \end{aligned}$$

Also ist $\psi^{-1}(U)$ offen, d.h. ψ ist stetig.

∎

3.2 Schwache Topologie

Sei nun X ein Banachraum und $f \in X^* \quad f : X \to \mathbb{R}$. Dann definieren wir

$$\varphi_f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle f, x \rangle,$$

und erhalten dann die Abbildungen $(\varphi_f)_{f \in X^*}$.

2.1 Definition. *Sei X ein Banachraum und X^* sein Dualraum. Die* ***schwache Topologie*** $\tau(X, X^*)$ *ist die gröbste Topologie auf X, bezüglich derer alle Abbildungen $(\varphi_f)_{f \in X^*}$ stetig sind, d.h. wir wenden die Konstruktion aus Abschnitt 3 auf $X = X$, $Y_i = \mathbb{R}$ und $I = X^*$ an.*

2.2 Definition. *Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge in X. Man sagt, dass (x_n)* ***schwach*** *gegen x konvergiert, wenn für alle $f \in X^*$ gilt:*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \qquad (n \to \infty)$$

Notation: $x_n \rightharpoonup x \, (n \to \infty)$

- In Lemma 1.2 $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x_n \to x$ bezüglich $\tau(X, X^*)$.
- $x_n \to x$ in der Norm $\Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$ **starke Konvergenz**.

2.3 Satz. *Die schwache Topologie $\tau(X, X^*)$ ist eine Hausdorff Topoogie.*

Beweis : Sei $x_1 \neq x_2 \in X$. Zu zeigen ist: $\exists\ U_1, U_2 \in \tau$ mit $x_i \in U_i$ für $i = 1, 2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Wir wenden die geometrische Variante des Satzes von Hahn-Banach an. Die Menge $\{x_1\}$ ist abgeschlossen und konvex und die Menge $\{x_2\}$ ist kompakt. Dann folgt mit Kapitel 1, Satz 2.11, dass es ein $f \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\langle f, x_1 \rangle < \alpha < \langle f, x_2 \rangle.$$

Die Mengen $U_1 := f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \tau$ und $U_2 := f^{-1}(\alpha, \infty) \in \tau$ besitzen dann die gesuchten Eigenschaften $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $x_i \in U_i$. ■

2.4 Lemma. *Sei $x_0 \in X$. Eine Umgebungsbasis von x_0 bzgl. $\tau(X, X^*)$ ist durch die Mengen der Form*

$$V = \left\{ x \in X \,\middle|\, |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, i \in J \right\},$$

wobei J endlich ist, $f_i \in X^*$ und $\varepsilon > 0$, gegeben.

Beweis :

$$\begin{aligned} V &= \bigcap_{i \in J} \{ x \in X \,|\, |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon \} \\ &= \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(-\infty, \langle f, x_0 \rangle + \varepsilon) \bigcup f^{-1}(-\varepsilon + \langle f, x_0 \rangle, \infty), \end{aligned}$$

also ist V eine offene Umgebung von x_0. Sei U Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$. Dann folgt wegen der Konstruktion von $\tau(X, X^*)$, dass wir oBdA U

schreiben können als $U = \bigcap_{i\in J} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$, wobei ω_i Umgebungen von $\langle f_i, x_0\rangle$ in $\mathbb{R}$ sind und J endlich. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $(\langle f_i, x_0\rangle - \varepsilon, \langle f_i, x_0\rangle + \varepsilon) \subseteq \omega_i$ und somit gilt:

$$x_0 \in V = \bigcap_{i\in J}\{x \in X \,\big|\, |\langle f_i, x_0\rangle| < \varepsilon\} \subseteq \bigcap_{i\in J} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$$

■

2.5 Satz. *Für eine Folge $(x_n) \subseteq X$ gilt:*

(i) $x_n \to x$ *bzgl.* $\tau(X, X^*)$ *genau dann, wenn* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ *für alle* $f \in X^*$,

(ii) $x_n \to x$ *stark in* X, *dann gilt:* $x_n \rightharpoonup x$ *schwach in* X,

(iii) $x_n \rightharpoonup x$ *schwach in* X, *dann ist die Folge* $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt und es gilt:*

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \ .$$

(iv) $x_n \rightharpoonup x$ *schwach in* X *und* $f_n \to f$ *stark in* X^*, *dann gilt:*

$$\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \,.$$

Beweis :

(i) Lemma 1.2

(ii) Für $f \in X^*$ ist $|\langle f, x_n - x\rangle| \le \|f\|_{X^*} \|x_n - x\|_X \to 0$ d.h. $x_n \rightharpoonup x$

(iii) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall f \in X^* : \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, d.h. die Folge reeller Zahlen $\langle f, x_n\rangle$ ist beschränkt. Definiere die Operatoren

$$A_n : X^* \to \mathbb{R} : f \mapsto \langle f, x_n\rangle.$$

$(A_n)_n$ ist linear und beschränkt, denn $\|A_n\| \le \|x_n\|$ und für alle $f \in X^*$ ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(f)\| < \infty$. Dann ist nach Kapitel 2, Satz 1.1

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty,$$

also auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |A_n(f)| < \infty.$$

In Kapitel 1 haben wir Formel (1.11) gezeigt:

$$\|x_n\| = \sup_{\|f\|_{X^*}\leq 1} |\underbrace{\langle f, x_n\rangle}_{=A_n(f)}|$$

Also ist $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$, also ist $\|x_n\|$ beschränkt.
Außerdem ist $|\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\|_{X^*}\|x_n\|$ und es gilt:

$$|\langle f, x\rangle| = \liminf_{n\to\infty} |\langle f, x_n\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f\|\|x_n\|.$$

Somit:

$$\|x\| = \sup_{\|f\|_{X*}\leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \sup_{\|f\|\leq 1} \|f\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

(iv) Sei $x_n \rightharpoonup x$ und $f_n \to f$, dann folgt:

$$\begin{aligned}
|\langle f, x\rangle - \langle f_n, x_n\rangle| &\leq |\langle f, x\rangle - \langle f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f_n, x_n\rangle| \\
&= |\langle f, x - x_n\rangle| + |\langle f - f_n, x_n\rangle| \\
&\leq |\langle f, x - x_n\rangle| + \|f - f_n\|_{X^*}\|x_n\| \to 0
\end{aligned}$$

da $x_n \rightharpoonup x$, $f_n \to f$ und $\|x_n\|$ beschränkt.

∎

2.6 Satz. *Sei X ein endlichdimensionaler Banachraum. Dann stimmen die starke und die schwache Topologie überein. Insbesondere konvergiert eine Folge schwach genau dann, wenn sie stark konvergiert.*

Beweis : Die starke Topologie ist durch die Norm induziert. Sie ist immer feiner als die schwache Topologie. Wir müssen also nur zeigen:

U offen bezüglich starker Topologie $\Rightarrow$ U offen bezüglich schwacher Topologie

Sei $x_0 \in X$ und V eine Umgebung von x_0 bezüglich der starken Topologie. Dann gibt es einen Radius $r > 0$, so dass $B_r(x_0) \subseteq V$. Da X endlichdimensional ist, gibt es eine Basis $e_1, \ldots e_n$ von X mit $\|e_i\| = 1$. Für jedes $x \in X$ gibt es dann eindeutige $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ mit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Wir definieren die Abbildungen $f_i \in X^*$ durch $f_i : X \to \mathbb{R} : x \mapsto x_i$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\|x - x_0\| &= \|\sum_{i=1}^{n}(x-x_0)_i e_i\| \\ &= \|\sum_{i=1}^{n}\langle f_i, x - x_0\rangle e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0\rangle|,\end{aligned}$$

da $\|e_i\| = 1$. Setze

$$U := \bigcap_{i=1}^{n}\{x \in X \,\big|\, |\langle f_i, x - x_o\rangle| < \frac{r}{n}\}.$$

Dann ist U offene Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$ und für $x \in U$ gilt:

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \sum_{i=1}^{n} \frac{r}{n} = n\frac{r}{n} = r.$$

Also ist $x \in B_r(x_0)$, d.h. $U \subseteq B_r(x_0) \subseteq V$, d.h. V ist Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$.

■

• Wenn $\dim X < \infty$ ist, dann stimmen die starke und die schwache Topologie überein.
• Wenn $\dim X = \infty$ ist, dann ist im Allgemeinen starke Topologie $\supsetneq$ schwache Topologie.
• Analoge Aussagen gelten für abgeschlossene Mengen.

2.7 Beispiel. (i) $\dim X = \infty$, $S := \{x \in X \,\big|\, \|x\| = 1\}$. *$S$ ist stark abgeschlossen, aber **nicht** schwach abgeschlossen. Es gilt*

$$\overline{S}^{\tau(X,X^*)} = \overline{B_1(0)}. \tag{2.8}$$

Beweis : Sei $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| < 1$. Wir müssen zeigen, dass $x_0 \in \overline{S}^{\tau}$. Sei also V Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$. Zu zeigen: $V \cap S \neq \emptyset$.

Nach Lemma 1.2 können wir oBdA $V = \bigcup_{i=1}^{n}\{x \in X \,\big|\, |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ und $f_i \in X^*$ annehmen. Es gibt ein $y_0 \in X$, $y_0 \neq 0$, so dass für alle $i = 1, \ldots, n : \langle f_i, y_0\rangle = 0$. Falls dem nicht so ist, ist die Abbildung

$\varphi : X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (\langle f_i, x\rangle)_{i=1,\dots,n}$ injektiv. Dann ist $\varphi : X \to \varphi(X)$ ein Isomorphismus. Also folgt $\dim X \leq n$ im Widerspruch zu $\dim X = \infty$. Also gibt es so ein y_0 mit obiger Eigenschaft. Betrachte

$$g : [0,\infty) \to [0,\infty),$$
$$g(t) := \|x_0 + ty_0\|.$$

g ist stetig, $g(0) = \|x_0\| < 1$ und $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) \to \infty$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es also ein t_0 mit $g(t_0) = 1$. Für alle i gilt $\langle f_i, x_0 + t_0 y_0 - x_0\rangle = 0 \Rightarrow x_0 + t_0 y_0 \in V \cap S \Rightarrow S \subseteq \overline{B_1(0)} \subseteq \overline{S}^\tau \Rightarrow \overline{S}^\tau \subseteq \overline{\overline{B_1(0)}}^\tau \subseteq \overline{S}^\tau$. Satz 2.10 (später): M konvex, dann ist $\overline{M} = \overline{M}^\tau$. Somit folgt die Behauptung. ∎

(ii) $B_1(0)$ *ist nicht **offen** bezüglich* $\tau(X, X^*)$, *genauer*

$$\operatorname{int}_\tau B_1(0) = \emptyset. \tag{2.9}$$

Beweis : Sei $x_0 \in \operatorname{int}_\tau B_1(0) \Rightarrow \exists$ Umgebung V von x_0 bezüglich τ, so dass $V \subseteq B_1(0)$ und für alle $x_0 \in B_1(0)$ gibt es nach obigem Beweis t_0, $y_0 \neq 0$ mit $\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$ und $x_0 + t_0 y_0 \in V \subseteq B_1(0)$, ein Widerspruch. ∎

2.10 Satz. *Sei $C \subseteq X$ eine konvexe Teilmenge eines Banachraumes X. Dann ist C stark abgeschlossen genau dann, wenn C schwach abgeschlossen ist.*

Beweis : Die Richtung

„C ist schwach abgeschlossen“ $\Rightarrow$ „C ist stark abgeschlossen“

ist trivial, da die schwache Topologie gröber ist als die starke. Sei also C stark abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass das Komplement von C bezüglich der schwachen Topologie offen ist:
Sei $x_0 \notin C$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine x_0 und C strikt trennende abgeschlossene Hyperebene, d.h. es existiert ein $f \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle\,, \qquad y \in C\,.$$

Die Menge (vgl. Lemma 2.4)

$$V = \{x \in X | \, \langle f, x\rangle < \alpha\}$$

ist aber eine bezüglich der schwachen Topologie offene Menge, somit eine offene, mit C disjunkte Umgebung von x_0. Damit ist C abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie. ∎

2.11 Folgerung (Satz von Mazur). *Es sei $(x_n) \subseteq X$ eine schwach konvergente Folge in einem Banachraum X. Dann gibt es eine Folge (y_j) von konvexen Linearkombinationen*

$$y_j = \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j x_{n_{kj}}\,,\ c_k^j \geq 0\,,\ \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j = 1$$

die stark gegen den schwachen Limes von (x_n) konvergiert.

Beweis : Wir bilden die Menge C aller endlichen konvexen Linearkombinationen von Elementen x_n. C ist offensichtlich konvex, ebenso der Abschluss $\overline{C}$ bezüglich der starken Topologie. Ist nun $x_n \rightharpoonup x$ schwach, so muss wegen Satz 2.10 x ebenfalls in $\overline{C}$ liegen. Nach Definition von $\overline{C}$ gibt es dann aber eine Folge $(y_j) \subseteq C$, die stark gegen x geht. Die Elemente aus $\overline{C}$ haben aber gerade die gesuchte Gestalt. ■

• Die Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}$ heißt **unterhalbstetig** (bzw. **oberhalbstetig**) genau dann, wenn $\varphi^{-1}((-\infty, r])$ (bzw. $\varphi^{-1}([r, \infty))$) abgeschlossen ist.

2.12 Folgerung. *Sei $\varphi : X \to \mathbb{R}$ eine konvexe, unterhalbstetige Funktion bezüglich der starken Topologie. Dann ist φ auch unterhalbstetig bezüglich der schwachen Topologie.*

Beweis : Zu zeigen ist, dass für alle $r \in \mathbb{R}$ die Menge

$$A := \{x \in X \,\big|\, \varphi(x) \leq r\}$$

abgeschlossen ist bezüglich $\tau(X, X^*)$. φ ist konvex, also ist A konvex, denn für $x, y \in A$ gilt

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r.$$

Nach Voraussetzung ist A abgeschlossen, also folgt mit Satz 2.10, dass A schwach abgeschlossen ist. ■

2.13 Satz. *Seien X, Y Banachräume und $A : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann ist A stetig bezüglich der starken Topologien genau dann, wenn A stetig bezüglich der schwachen Topologien ist.*

Beweis :

“$\Rightarrow$“ Wir wollen zeigen, dass $A : (X, \tau(X, X^*)) \to (Y, \tau(Y, Y^*))$ stetig ist. Nach Lemma 1.3 reicht es zu zeigen, dass für alle $f \in Y^*$ die Abbildung

$$\varphi := f \circ A : (X, \tau(X, X^*)) \to \mathbb{R} :\ x \mapsto \langle f, Ax\rangle$$

stetig ist. Da $\varphi = f \circ A$ linear ist, reicht es also, die Stetigkeit bzgl. der schwachen Topologie im Nullpunkt zu überprüfen. Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ Umgebung von 0. Also gibt es ein $r > 0$:

$$B_r(0) \subseteq V.$$

Aber $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ist stetig bzgl. der starken Topologie und linear und somit ist nach Konstruktion der schwachen Topologie $U := \{x \in X \big| \ |\langle\varphi, x\rangle| < r\}$ Umgebung von 0 bezüglich $\tau(X, X^*)$. $U = \varphi^{-1}(B_r(0)) \Rightarrow \varphi(U) = B_r(0) \subseteq V$, d.h. φ ist schwach stetig.

"$\Leftarrow$" Sei $A : (X, \tau(X, X^*)) \to (Y, \tau(Y, Y^*))$ stetig und linear. Wir müssen zeigen, dass A stark stetig ist.
Es gilt: Wenn $T : (E, \tau) \to (F, \sigma)$ eine stetige Abbildung topologischer Hausdorffräume ist, dann ist $G(T)$ abgeschlossen bezüglich $\tau \times \sigma$. Wir beweisen dies:
Wir zeigen: $(E \times F) \setminus G(T)$ ist offen. Für $(x_0, y_0) \in (E \times F) \setminus G(T)$ gilt $y_0 \neq Tx_0$. Es gibt also Umgebungen U_0, $V_0 \in \sigma$ mit $y_0 \in U_0$, $Tx_0 \in V_0$ und $V_0 \cap U_0 = \emptyset$. T ist stetig, also ist $W_0 := T^{-1}(V_0) \in \tau$, $x_0 \in W_0$. $W_0 \times U_0$ ist offen in $\tau \times \sigma$ und es gilt $W_0 \times U_0 \cap G(T) = \emptyset$, denn wäre $(x, y) \in W_0 \times U_0 \cap G(T) \Rightarrow y = Tx \in U_0$ mit $x \in W_0 = T^{-1}(V_0) \Rightarrow Tx \in V_0$, dies ist ein Widerspruch zu $U_0 \cap V_0 = \emptyset$.

Dies, angewendet in unserer Situation liefert, dass $G(A)$ abgeschlossen ist bezüglich $\tau(X, X^*) \times \tau(Y, Y^*)$. Da die schwache Topologie gröber ist als die starke, folgt dass $G(A)$ abgeschlossen ist bezüglich der starken Topologie.

Da A linear ist, folgt dann mit Satz 2.7 aus Kapitel 2, dass A stetig ist.

■

3.3 $*$-Schwache Topologie

Auf dem Dualraum X^* eines normierten Raumes kann man neben der starken Topologie (gegeben durch die Norm in X^* (vergleiche Kap. 0.2 (1.2)) und der schwachen Topologie $\tau(X^*, X^{**})$ noch die $*$-schwache Topologie $\tau(X^*, X)$ definieren. Für $x \in X$ definieren wir $\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_x(f) := \langle f, x\rangle$$

und betrachten die Familie $(\varphi_x)_{x \in X}$.

3.1 Definition. *Die* $*$***-schwache Topologie*** $\tau(X^*, X)$ *auf dem Dualraum* X^* *eines normierten Vektorraumes* X *ist die gröbste Topologie bzgl. derer alle Abbildungen* $(\varphi_x)_{x\in X}$ *stetig sind, das heißt wir setzen* $X = X^*, Y_i = \mathbb{R}, I = X$ *in Abschnitt 3.1.*

3.2 Satz. *Die* $*$*-schwache Topologie ist eine Hausdorff Topologie.*

Beweis : Seien $f_1,\ f_2 \in X,\ f_1 \neq f_2$. Dann gibt es ein $x \in X$: mit $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$. Sei $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$. Also gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R} : \langle f_1, x\rangle < \alpha\langle f_2, x\rangle$. Setze

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{f \in X^* \,|\, \langle f, x\rangle < \alpha\} = \varphi_x^{-1}(-\infty, \alpha), \\ U_2 &:= \{f \in X^* \,|\, \langle f, x\rangle > \alpha\} = \varphi_x^{-1}(\alpha, \infty). \end{aligned}$$

Dann gilt: $U_1,\ U_2 \in \tau(X^*, X),\ f_1 \in U_1,\ f_2 \in U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ∎

• Wir sagen, die Folge $(f_n)_n \subseteq X^*$ **konvergiert** $*$**-schwach** gegen $f \in X^*$ genau dann, wenn $f_n \to f$ bezüglich $\tau(X^*, X)$. Wir benutzen die Notation

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \qquad (n \to \infty)$$

Dies ist nach Lemma 1.2 äquivalent zu

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \qquad (n \to \infty)\,\forall\ x \in X,$$

d.h. punktweise Konvergenz.

• Wir wollen nun die Topologien $\tau(X^*, X)$, $\tau(X^*, X^{**})$ und die starke Topologie (induziert durch die Operatornorm in X^*) miteinander vergleichen. Dazu benötigen wir folgende Überlegung: Sei X ein Banachraum, X^* sein Dualraum mit der Norm

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle f, x\rangle_{X^*,X}|$$

und X^{**} sein Bidualraum mit der Norm

$$\|g\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |\langle g, f\rangle_{X^{**},X^*}| \ .$$

Die **kanonische Isometrie** $J : X \to X^{**}$ wird wie folgt definiert: sei $x \in X$ fest, die Abbildung $f \mapsto \langle f, x\rangle$ von X^* nach $\mathbb{R}$ ist ein beschränktes, lineares Funktional auf X^*, d.h. ein Element von X^{**}, das mit Jx bezeichnet wird. Wir haben also

$$\langle Jx, f\rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*,X} \quad \forall x \in X, f \in X^* \,. \tag{3.3}$$

Es ist klar, daß J linear und eine Isometrie ist, d.h. $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ für alle $x \in X$. In der Tat gilt:

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |\langle Jx, f\rangle| \overset{(3.3)}{=} \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |\langle f, x\rangle| \overset{\text{Kapitel } 1.1\,(1.11)}{=} \|x\| \,.$$

Allerdings ist J nicht notwendig surjektiv. Man kann aber immer mit Hilfe von J den Raum X mit einem abgeschlossenen Unterraum von X^{**} identifizieren.

Beispiel: Wir werden zeigen, dass $(L^1(\Omega))^* = L^\infty$ und $(L^\infty(\Omega))^* \supsetneqq L^1(\Omega)$, d.h. $L^1(\Omega) \subsetneqq (L^1(\Omega))^{**}$.

• Sei X ein Banachraum. Dann sind auf X^* die schwache $\tau(X^*, X^{**})$ und die $*$-schwache $\tau(X^*, X)$ und die starke Topologie S definiert. Da $X \subseteq X^{**}$, ist $\tau(X^*, X) \subseteq \tau(X^*, X^{**}) \subseteq S$. Wir werden zeigen, dass die abgeschlossene Einheitskugel

$$\overline{B_1(0)} = \{f \in X^* \,\big|\, \|f\| \le 1\}$$

kompakt bezüglich $\tau(X^*, X)$ ist.

• Wenn $\dim X < \infty$ ist, wissen wir aus der linearen Algebra, dass dann

$$\dim X = \dim X^* = \dim X^{**}$$

und somit sind nach Satz 2.6 alle Topologien identisch.

Völlig analog zu Lemma 2.4 und Satz 2.5 beweist man:

3.4 Lemma. *Sei $f_0 \in X^*$. Eine Umgebungsbasis von f_0 bzgl. $\tau(X^*, X)$ ist durch Mengen der Form*

$$V = \{f \in X^* \,\big|\, |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon, i \in J\}\,,$$

wobei J endlich ist, $x_i \in X$ und $\varepsilon > 0$, gegeben.

3.5 Lemma. *Für eine Folge $(f_n) \subseteq X^*$ gilt:*

(i) *$f_n \to f$ bzgl. $\tau(X^*, X)$ genau dann, wenn für alle $x \in X$ gilt:*

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle,$$

(ii) *$f_n \to f$ stark in X^*, dann gilt: $f_n \rightharpoonup f$ schwach in X^*,*
$f_n \rightharpoonup f$ schwach in X^*, dann gilt: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ $*$-schwach in X^*,

(iii) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *$*$-schwach in X^*, dann ist die Folge $(\|f_n\|)$ beschränkt und es gilt:*

$$\|f\| \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\| \ ,$$

(iv) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *$*$-schwach in X^* und $x_n \to x$ stark in X, dann gilt:*

$$\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$$

3.6 Satz. *Sei $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$ linear und stetig bezüglich $\tau(X^*, X)$. Dann existiert ein $x \in X$ mit*

$$\varphi(f) = \langle f, x\rangle \quad \forall\, f \in X^*. \tag{3.7}$$

3.8 Lemma. *Sei X ein Vektorraum und seien $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ Linearformen auf X mit der Eigenschaft*

$$\varphi_i(x) = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n \Rightarrow \varphi(x) = 0. \tag{3.9}$$

Dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i .$$

Beweis : Betrachte

$$F : X \to \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (\varphi(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

Mit (3.9) folgt, dass $a = (1, 0, \dots, 0) \notin R(F)$ und $R(F)$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum ist. Also gibt es nach Kapitel 1, Satz 2.11 eine Hyperebene auf $\mathbb{R}^{n+1}$, die a und $R(F)$ trennt, d.h. es existieren $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_0 < \alpha < \lambda_0 \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Da X ein linearer Raum ist, gilt die Aussage nicht nur für x, sondern auch für βx und wir können mit $\beta \to \infty$ gehen. Dann folgt

$$0 = \lambda_0 \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x),$$

aber da $\lambda_0 < \alpha < 0$ ist $\lambda_0 \neq 0$. Wir können also durch λ_0 teilen und erhalten:

$$\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \varphi_i(x),$$

wir haben also also die gesuchte Darstellung gefunden. ∎

Beweis (Satz 3.6): Da $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$ linear und stetig ist, gibt es eine Umgebung V von 0 bezüglich $\tau(X^*, X)$ mit

$$|\varphi(f)| < 1 \qquad \forall\, f \in V.$$

OBdA sei V von der Form

$$V = \{f \in X^* \,\big|\, |\langle f, x_i \rangle| < \varepsilon,\, i = 1, \dots, n\}$$

mit $x_i \in X$, $\varepsilon > 0$. Falls f derart ist, dass

$$\langle f, x_i \rangle = 0 \qquad i = 1, \dots, n,$$

dann ist $f \in V$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f \in V$. Also ist $|\alpha||\varphi(f)| < 1$ und nach Übergang $|\alpha| \to \infty$ folgt $\varphi(f) = 0$.
Betrachte für $i = 1, \dots, n$: $\varphi_i(f) = \langle f, x_i \rangle$, $f \in X^*$ und $\varphi(f)$. φ_i und φ sind Linearformen auf X^*. Nach Lemma 3.8 gibt es $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so dass für alle $f \in X^*$ gilt:

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, x_i \rangle = \langle f, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}_{=:x} \rangle$$

∎

3.10 Satz (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Die abgeschlossene Einheitskugel*

$$B_{X^*} := \{f \in X^* \,\big|\, \|f\|_{X^*} \leq 1\}$$

des Dualraumes eines Banachraumes X ist kompakt bezüglich der ∗-schwachen Topologie $\tau(X^*, X)$.

• Kurzausflug in die Topologie
Für topologische Räume (X_i, τ_i) betrachtet man den Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ und Projektionen

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j n : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j.$$

Die kanonische Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ ist die schwache Topologie aus Abschnitt 3.1 mit $X = \prod_{i\in I} X_i$, $Y_i = X_i$, $\varphi_i = \pi_i$. Dies ist die gröbste Topologie, bezüglich derer die π_i, $i \in I$ stetig sind. Diese Topologie ist Hausdorff, da die π_i stetig sind und die X_i Hausdorff.

3.11 Satz (Tychonoff). *Seien (X_i, τ_i) topologische Räume. Der Produktraum $(\prod_{i\in I} X_i, \tau)$ ist genau dann kompakt, wenn X_i, $i \in I$ kompakt ist.*

Beweis :

"$\Rightarrow$" Wenn $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ stetig ist und X kompakt, dann ist auch das Bild $f(X)$ kompakt. Nach Konstruktion sind die $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ stetig und da $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt ist, ist $\pi_j(\prod_{i\in I} X_i) = X_j$ kompakt.

"$\Leftarrow$" ohne Beweis, z.B. im Buch von Rudin "Funktionalanalysis" oder im Buch von Meise, Vogt "Funktionalanalysis".

■

Beweis (Satz 3.10):
Betrachte $\mathbb{R}^X = Z := \prod_{x\in X} \mathbb{R}_x$ mit Elementen $\omega = (\omega_x)_{x\in X}$, $\omega_x \in \mathbb{R}$. Wir versehen Z mit der kanonischen Topologie τ, außerdem versehen wir X^* mit der $*$-schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$. Die Projektionen $\pi_y : Z \to \mathbb{R} : \ \omega = (\omega_x)_{x\in X} \mapsto \omega_y$ sind stetig für alle $y \in Y$. Betrachte die Abbildung

$$\Phi : X^* \to Z : \ f \mapsto (\langle f, x\rangle)_{x\in X}$$

Nach Lemma 1.3 ist Φ stetig genau dann, wenn für alle $y \in Y$ gilt, dass die Abbildung

$$\pi_y \circ \Phi : X^* \to \mathbb{R}$$

stetig ist. Sei $y \in X$, dann ist $\pi_y \circ \Phi(f) = \langle f, y\rangle$ linear. Für $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{f \in X^* \,\big|\, |\langle f, x\rangle| < \varepsilon\}$ eine offene Umgebung der Null bezüglich $\tau(X^*, X)$ und somit ist $\pi_y \circ \Phi$ stetig.

Wir zeigen, dass Φ ein Homöomorphismus ist, d.h. wir zeigen, dass Φ und Φ^{-1} stetig sind und dass Φ bijektiv ist. Offensichtlich ist

$$\Phi : X^* \to \Phi(X^*)$$

surjektiv. Sei $\Phi(f) = \Phi(g)$, dann ist $\langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle \,\forall\, x \in X \Rightarrow f = g$, Φ ist also injektiv.

Wir müssen noch zeigen, dass die Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1} : \Phi(X^*) \to X^*$$

stetig ist. Wir wenden wieder Lemma 1.3 an, wir müssen also nur zeigen, dass für alle $y \in X$ die Abbildung $\varphi_y \circ \Phi^{-1} : \Phi(X^*) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Sei $\omega \in \Phi(X^*)$, dann hat ω die Form $\omega = (\langle f, x\rangle)_{x \in X},\ f \in X^*$, also ist $\Phi^{-1}(\omega) = f$. Aber $\varphi_y(g) = \langle g, y\rangle$, $g \in X^*$. Für $\omega \in \Phi(X^*)$ ist $\varphi_y(\Phi^{-1}(\omega)) = \langle f, y\rangle = \omega_y = \pi_y \omega$. Aber $\varphi_y \circ \Phi^{-1}$ ist somit gerade $\pi_y|_{\Phi(X^*)}$ und also stetig.
Sei

$$K := \{\omega \in Z \,\big|\, |\omega_x| \leq \|x\|,\ \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y,\ \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x \\ \forall\, x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Wir zeigen $\Phi(B_{X^*}) = K$:

"⊆" Sei $\omega \in \Phi(B_{X^*})$. Dann existiert $f \in B_{X^*}$ mit $\|f\|_{X^*} \leq 1$ und $\Phi(f) = (\langle f, x\rangle)_{x \in X}$. Dann ist

$$|\omega_x| = |\pi_x(\Phi(f))| = |\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|.$$

Weiterhin gilt:

$$\omega_{x+y} = \langle f, x + y\rangle = \langle f, x\rangle + \langle f, x\rangle = \omega_x + \omega_y.$$

Analog zeigt man $\omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x$. Also isz $\omega \in K$.

"⊇" Sei $\omega \in Z$ mit $\omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y$, $\omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x$. Wir definieren f durch:

$$\langle f, x\rangle := \omega_x.$$

Dann ist f linear und es gilt:

$$|\langle f, x\rangle| = |\omega_x| \leq \|x\|,$$

also ist f stetig mit $\|f\| \leq 1$. Somit ist $\omega = \Phi(f) \in B_{X^*}$.

Es reicht also zu zeigen, dass K kompakt ist, denn da $K = \Phi(B_{X^*})$ und Φ Homöorphismus, ist dann auch $\Phi^{-1}(K) = B_{X^*}$ kompakt.
Wir teilen K auf in zwei Mengen:

$$K = K_1 \cap K_2$$

mit

$$K_1 = \{\omega \in Z \,\big|\, |\omega_x| \leq \|x\| \,\forall\, x \in X\}$$

und

$$K_2 = \{\omega \in Z \,\big|\, \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y,\, \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x \,\forall\, x, y \in X,\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Offensichtlich kann man K_1 schreiben als

$$K_1 = \prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|].$$

Da die Intervalle $[-\|x\|, \|x\|]$ in $\mathbb{R}$ kompakt sind, ist nach Satz 3.11 auch ihr Produkt und somit K_1 kompakt.
K_2 ist abgeschlossen, denn für x, y fest, aber beliebig betrachte

$$A_{x,y} := \{\omega \in Z \,\big|\, \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\}$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$ fest, aber beliebig betrachte

$$B_{\lambda,x} = \{\omega \in Z \,\big|\, \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x = 0\}.$$

Urbilder der Null unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen, also ist auch ihr Durchschnitt

$$K_2 = \Big(\bigcap_{x,y \in X} A_{x,y}\Big) \cap \Big(\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R},\, x \in X} B_{\lambda,x}\Big)$$

abgeschlossen. Dann ist $K_1 \cap K_2$ eine abgeschlossene Teilmenge von K_1 und nach Kapitel 0.2, Lemma 2.6 ist K kompakt. ■

3.4 Reflexive Räume

4.1 Definition. *Sei X ein Banachraum und sei $J : X \to X^{**}$ die durch (3.3) definierte kanonische Isometrie von X nach X^{**}. Dann heißt X* ***reflexiv*** *genau dann, wenn J surjektiv ist.*

• Wenn X reflexiv ist, sind X und X^{**} identifizierbar.
• Es gibt einen Banachraum X und eine lineare, surjektive Isometrie von X auf X^{**}, so dass X nicht reflexiv ist.
• Wenn X reflexiv ist, stimmen die $*$-schwache Topologie $\tau(X^*, X)$ und die schwache Topologie $\tau(X^*, X^{**})$ überein.
• Aufgrund der Definition von reflexiv und schwacher bzw. $*$-schwacher Konvergenz erhält man sofort, daß für reflexive Banachräume X schwache und $*$-schwache Konvergenz in X^* übereinstimmen.

4.2 Satz (Kakutani). *X ist reflexiv genau dann, wenn*

$$B_X := \{x \in X \,\big|\, \|x\| \leq 1\}$$

kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$ ist.

Beweis "$\Rightarrow$": Da X reflexiv ist, ist J surjektiv, d.h. $J(X) = X^{**}$. Da J eine Isometrie ist, ist $J(B_X) = B_{X^{**}}$. Aus Satz 3.10 wissen wir, dass $B_{X^{**}}$ kompakt ist bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Wir zeigen nun, dass

$$J^{-1} : (X^{**}, \tau(X^{**}, X^*)) \to (X, \tau(X, X^*))$$

stetig ist.
Nach Lemma 1.3 reicht es, zu zeigen, dass für alle $f \in X^*$ die Abbildung

$$\omega \mapsto \langle f, J^{-1}\omega\rangle_{X^*,X}$$

als Abbildung von $(X^{**}, \tau(X^{**}, X^*))$ nach $\mathbb{R}$ stetig ist. Aber $\langle f, J^{-1}\omega\rangle_{X^*,X} = \langle \omega, f\rangle_{X^{**},X^*}$, wir betrachten also die Stetigkeit der Abbildung $\omega \mapsto \langle \omega, f\rangle_{X^{**},X^*}$. Sie ist aber schon stetig nach Konstruktion von $\tau(X^{**}, X^*)$, also ist B_X kompakt bezüglich $\tau(X, X^*)$.

Für die Rückrichtung benötigen wir 2 Lemmata.

4.3 Lemma. *Sei X ein Banachraum und $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Dann ist äquivalent:*

(i) *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_\varepsilon \in X$, so dass $\|x_\varepsilon\| \leq 1$ und für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt:*

$$|\langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \alpha_i| < \varepsilon,$$

(ii) *Für alle $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\Big|\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\Big| \leq \Big\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\Big\|_{X^*}.$$

Beweis :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest, $S := \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$. Nach (i) folgt

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\Big| &\leq S\varepsilon, \text{ und somit}\\ \Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\Big| &\leq \Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\langle f_i, x_\varepsilon\rangle\Big| + S\varepsilon\\ &\leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\Big\|_{X^*} \|x_\varepsilon\|_X + S\varepsilon\end{aligned}$$

Da $\|x_\varepsilon\|_X \leq 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig folgt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ und

$$\varphi : X \to \mathbb{R}^n : \, x \mapsto (\langle f_1, x\rangle, \ldots, \langle f_n, x\rangle).$$

Die Aussage (i) gilt genau dann, wenn $\alpha \in \overline{\varphi(B_X)}$ ist. Dies zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis. Sei also $\alpha \notin \overline{\varphi(B_X)}$. $\{\alpha\}$ ist kompakt, $\overline{\varphi(B_X)}$ ist abgeschlossen und konvex, dann folgt mit dem Satz von Hahn-Banach, dass es ein $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i\langle f_i, x\rangle < \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \qquad \forall\, x \in B_X$$

und da auch $-x \in B_X$ ist, folgt

$$|\langle\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i, x\rangle| = |\sum_{i=1}^{n} \beta_i\langle f_i, x\rangle| < \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i.$$

Wir bilden das Supremum über $x \in B_X$ und erhalten:

$$\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\|_{X^*} \leq \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (ii).

■

4.4 Lemma. *Sei X ein Banachraum. Dann ist $J(B_X)$ dicht in $B_{X^{**}}$ bezüglich der $*$-schwachen Topologie $\tau(X^{**}, X^*)$.*

Beweis : Sei $\omega \in B_{X^{**}}$ und V Umgebung von ω bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Wir müssen zeigen, dass $V \cap J(B_X) \neq \emptyset$. OBdA sei

$$V = \{\eta \in X^{**} \,\big|\, |\langle \eta - \omega, f_i \rangle| < \varepsilon,\, i = 1, \ldots, n\},$$

mit $\varepsilon > 0$, $f_i \in X^*$. Wir müssen also zeigen, dass es ein $x \in B_X$ gibt mit

$$|\langle J_X, f_i \rangle_{X^{**},X^*} - \langle \omega, f_i \rangle| = |\langle f_i, x \rangle_{X^*,X} - \langle \omega, f_i \rangle| < \varepsilon,\, i = 1, \ldots, n. \tag{4.5}$$

Sei $\alpha := \langle \omega, f_i \rangle$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ fest, aber beliebig. Dann ist

$$|\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i| = |\sum_{i=1}^n \beta_i \langle \omega, f_i \rangle| \leq \|\omega\|_{X^{**}} \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\|_{X^*}.$$

Das ist (ii) aus Lemma 4.3. Aus Lemma 4.3 (i) folgt also, dass ein $x_\varepsilon \in B_X$ existiert, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \alpha_i| < \varepsilon,$$

und nach der Definition von α folgt (4.5) und somit die Behauptung. ∎

Beweis (Satz 4.2, "$\Leftarrow$"): Sei B_X kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$. Wir wissen, dass $J : X \to X^{**}$ stetig bezüglich den starken Topologien ist und mit Satz 2.13 folgt

$$J : (X, \tau(X, X^*)) \to (X^{**}, \tau(X^{**}, X^{***})),$$

ist stetig. Da $\tau(X^{**}, X^*)$ gröber ist als $\tau(X^{**}, X^{***})$ folgt, dass

$$J : (X, \tau(X, X^*)) \to (X^{**}, \tau(X^{**}, X^*))$$

stetig ist. Also ist $J(B_X)$ kompakt bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Allgemein gilt, dass jede kompakte Menge abgeschlossen ist und da wegen Lemma 4.4 $J(B_X)$ dicht in $B_{X^{**}}$ bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$ ist, folgt

$$J(B_X) = B_{X^{**}}.$$

Nach Skalierung erhält man $J(X) = X^{**}$. ∎

4.6 Lemma. *Sei X ein Banachraum. Dann gelten:*

(i) *Jeder abgeschlossene lineare Unterraum von X ist reflexiv, falls X reflexiv ist.*

(ii) *Sei $A : X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann ist X reflexiv genau dann, wenn Y reflexiv ist.*

(iii) *X ist reflexiv genau dann, wenn X^* reflexiv ist.*

Beweis : (i) Sei $G \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Für $g \in G^{**}$ definieren wir $\tilde{g} \in X^{**}$ durch

$$\langle \tilde{g}, f \rangle_{X^{**},X^*} := \langle g, f|_G \rangle_{G^{**},G^*}\,, \qquad f \in X^*\,.$$

Wir zeigen, dass $J_X^{-1}\tilde{g} \in G$. Falls $J_X^{-1}\tilde{g} \notin G$ gelten würde, gäbe es nach Satz 2.11 ein $f \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, u \rangle_{X^*,X} > \alpha > \langle f, J_X^{-1}\tilde{g} \rangle_{X^*,X} = \langle \tilde{g}, f \rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, f|_G \rangle_{G^{**},G^*}, \qquad \forall\, u \in G\,. \tag{4.7}$$

Da G ein Unterraum von X ist, folgern wir sofort $\langle f, u \rangle = 0, u \in G$, d.h. $f|_G = 0$. Dies wiederum in (4.7) eingesetzt ergibt einen Widerspruch.
Wir zeigen nun, dass $J_G(J_X^{-1}\tilde{g}) = g$ gilt. Sei $f \in G^*$ und $\tilde{f} \in X^*$ eine Fortsetzung nach dem Satz von Hahn-Banach. Dann gilt (vgl. (3.3), Def. $\tilde{g}$):

$$\begin{aligned}
\langle g, f \rangle_{G^{**},G^*} &= \langle g, \tilde{f}|_G \rangle_{G^{**},G^*} \\
&\overset{\text{Def.}\,\tilde{g}}{=} \langle \tilde{g}, \tilde{f} \rangle_{X^{**},X^*} \\
&= \langle \tilde{f}, J_X^{-1}\tilde{g} \rangle_{X^*,X} \\
&\overset{J_X^{-1}\tilde{g} \in G}{=} \langle f, J_X^{-1}\tilde{g} \rangle_{G^*,G} = \langle J_G J_X^{-1}\tilde{g}, f \rangle_{G^{**},G^*}\,,
\end{aligned}$$

d.h. $g = J_G(J_X^{-1}\tilde{g})$ und somit ist J_G surjektiv.
(ii) Es reicht zu zeigen:

$$X \text{ reflexiv} \Rightarrow Y \text{ reflexiv},$$

denn die andere Richtung folgt dann sofort, da die Inverse auch ein Isomorphismus ist. Sei also X reflexiv und $g \in Y^{**}$. Dann ist durch

$$\langle h, u \rangle_{X^{**},X^*} := \langle g, u \circ A^{-1} \rangle_{Y^{**},Y^*}\,, \qquad u \in X^*$$

ein $h \in X^{**}$ definiert. Für alle $v \in Y^*$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle g, v \rangle_{Y^{**},Y^*} &= \langle h, v \circ A \rangle_{X^{**},X^*} \\
&= \langle v \circ A, J_X^{-1}h \rangle_{X^*,X} \\
&= \langle v, A J_X^{-1}h \rangle_{Y^*,Y} \\
&= \langle J_Y A J_X^{-1}h, v \rangle_{Y^{**},Y^*}\,,
\end{aligned}$$

d.h. $g = J_Y A J_X^{-1} h$ und somit ist J_Y surjektiv.
(iii) Nach Satz 3.10 ist B_{X^*} kompakt bezüglich der $*$-schwachen Topologie $\tau(X^*, X)$. Da X reflexiv ist, ist $\tau(X^*, X) = \tau(X^*, X^{**})$, d.h. B_{X^*} ist auch kompakt bezüglich $\tau(X^*, X^{**})$ und dann folgt mit Satz 4.2, dass X^* reflexiv ist.
Sei umgekehrt X^* reflexiv. Nach dem gerade gezeigten ist X^{**} reflexiv. Da $J_X(X)$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum von X^{**} ist, ist nach (i) $J_X(X)$ reflexiv und nach (ii) ist also X reflexiv. ■

4.8 Folgerung. *Sei X ein reflexiver Banachraum und K eine konvexe, abgeschlossene, beschränkte Teilmenge. Dann ist K kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$.*

Beweis : Da K konvex und abgeschlossen ist, folgt mit Satz 2.10, dass K abgeschlossen ist bezüglich $\tau(X, X^*)$ und da K beschränkt ist, gibt es ein r, so dass $K \subseteq \overline{B_r(0)} = r\overline{B_1(0)}$. Aber B_X ist kompakt bezüglich $\tau(X, X^*)$, d.h. auch $\overline{B_r(0)}$ ist kompakt bezüglich $\tau(X, X^*)$ und dann folgt mit Lemma 2.6 aus Kapitel 0, dass K kompakt ist bezüglich $\tau(X, X^*)$. ■

• Wir wollen nun untersuchen, ob B_X auch folgenkompakt ist. Dazu benötigen wir einige Resultate für separable Räume.

4.9 Satz. *Sei (M, d) ein separabler, metrischer Raum und $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann ist auch A separabel.*

Beweis : Da M separabel ist, gibt es eine Folge (x_n), die dicht in M liegt. Sei $(r_n) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $r_n \searrow 0$. Wähle $a_{n,m} \in A \cap B_{r_m}(x_n)$, falls $A \cap B_{r_m} \neq \emptyset$. $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ ist abzählbar. Sei $a \in A$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein x_n so, dass $d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $r_m < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist

$$d(a, a_{n,m}) \leq d(a, x_n) + d(x_n, a_{n,m}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + r_m < \varepsilon.$$

■

4.10 Satz. *Sei X ein Banachraum so, dass X^* separabel ist. Dann ist auch X separabel.*

Beweis : Da X^* separabel ist, gibt es eine Folge (f_n), die dicht in X^* liegt.

$$\|f_n\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle f_n, x\rangle| = \sup_{\|x\|_X = 1} |\langle f_n, x\rangle|$$

Die letzte Gleichheit gilt, denn:
“$\geq$“, da $\{\|x\| = 1\} \subseteq \{\|x\| \leq 1\}$ und

"$\leq$", da für $x \neq 0$ gilt: $\langle f_n, x\frac{\|x\|}{\|x\|}\rangle = \|x\|\langle f_n, \frac{x}{\|x\|}\rangle \leq \langle f_n, \frac{x}{\|x\|}\rangle$.
Also gibt es (x_n) mit $\|x_n\| = 1$, so dass $\langle f_n, x_n\rangle \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$. Sei L_0 der Vektorraum über $\mathbb{Q}$ generiert durch (x_n), d.h.

$$L_0 = \{x \in X \,\big|\, x = \sum_{n=1}^{N} q_n x_n,\, q_n \in \mathbb{Q}\}.$$

L_0 ist abzählbar, da $L_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$. $\Lambda_n = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{x_1, \dots, x_n\}$ ist isomorph zu $\mathbb{Q}^n$. Sei L der Vektorraum über $\mathbb{R}$ generiert durch (x_n). Dann gilt

$$L_0 \subseteq L \qquad \& \qquad L_0 \,\text{ist dicht in}\, L.$$

In der Tat, sei $x = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n \in L$, dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein q_n so, dass $|q_n - \alpha_n| \leq \frac{\varepsilon}{N}$ und dann ist

$$\|x - \sum q_n x_n\| = \|\sum \alpha_n x_n - \sum q_n x_n\| \leq \varepsilon.$$

Wenn wir zeigen, dass L dicht in X ist, ist die Behauptung bewiesen, denn dann ist $L_0 \subseteq L \subseteq X$ jeweils dicht, d.h. $\overline{L_0} = \overline{L} = X$. Sei $f \in X^*$ mit $\langle f, x\rangle = 0\,\forall\, x \in L$. Wir wollen zeigen, dass dann schon $f = 0$ ist, denn dann folgt mit Kapitel 1 Folgerung 2.12, dass $\overline{L} = X$ ist. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein f_n so, dass $\|f - f_n\| < \varepsilon$, dann gilt

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \leq \langle f_n, x_n\rangle = \langle f_n - f, x_n\rangle + \langle f, x_n\rangle = \langle f_n - f, x_n\rangle \leq \varepsilon$$

$$\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon,$$

und da ε beliebig war, folgt die Behauptung. ∎

4.11 Folgerung. *Sei X ein Banachraum. Dann ist X separabel und reflexiv genau dann, wenn X^* separabel und reflexiv ist.*

Beweis :

"$\Leftarrow$" Wenn X^* separabel ist, folgt mit Satz 4.9, dass X separabel ist und wenn X^* reflexiv ist, ist nach Lemma 4.6 (iii) X reflexiv.

"$\Rightarrow$" Nach Lemma 4.6 (iii) ist X reflexiv genau dann, wenn X^* reflexiv ist. Wenn X reflexiv ist, ist außerdem $J : X \to J(X) = X^{**}$ eine lineare Isometrie, wenn also (x_n) eine dichte Folge in X ist, ist auch $(J(x_n))$ dicht in X^{**}, d.h. X^{**} ist separabel. Dann folgt, dass X^* separabel und reflexiv ist.

■

4.12 Satz. *Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist B_{X^*} bezüglich der $*$-schwachen Topologie $\tau(X^*, X)$ metrisierbar, d.h. es existiert auf B_{X^*} eine Metrik d so, dass die durch sie generierte Topologie auf B_{X^*} mit $\tau(X^*, X)$ eingeschränkt auf B_{X^*} übereinstimmt.*

Beweis : Sei X separabel, d.h. es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die dicht in B_X liegt. Für f, $g \in B_{X^*}$ definieren wir die Metrik

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - g, x_n \rangle|$$

und betrachten die dadurch generierte Topologie.
(i) Für $f_0 \in B_{X^*}$ sei V Umgebung von f_0 bezüglich $\tau(X^*, X)$. Wir wollen zeigen, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$U := \{f \in B_{X^*} \bigm| d(f, f_n) < r\} \subseteq V.$$

OBdA können wir annehmen, dass für $\varepsilon > 0$, $y_i \in X$, V die Form hat

$$V = \{f \in B_{X^*} \bigm| |\langle f - f_0, y_i \rangle| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, k\}.$$

Es ist $\frac{y_i}{\|y_i\|} \in B_X$, es gibt also einen Index n_i, so dass

$$\Big\| \frac{y_i}{\|y_i\|} - x_{n_i} \Big\| < \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{\|y_i\|}.$$

Wähle $r > 0$ so, dass für alle $i = 1, \dots, k$ gilt

$$2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2\|y_i\|}.$$

Sei $f \in U$, d.h. $d(f, f_0) < r$, dann ist auch $\frac{1}{2^{n_i}} |\langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| < r \,\forall i$ und somit:

$$\begin{aligned}
|\langle f - f_0, y_i \rangle| &= \|y_i\| |\langle f - f_0, \frac{y_i}{\|y_i\|} \rangle| \\
&\le \|y_i\| (\langle f - f_0, \frac{y_i}{\|y_i\|} - x_{n_i} \rangle| + |\langle f - f_0, x_{n_i} \rangle|) \\
&\le \|y_i\| (\|f\| + \|f_0\|) \Big\| \frac{y_i}{\|y_i\|} - x_{n_i} \Big\| + \|y_i\| r 2^{n_i} \\
&\le 2 \frac{\|y_i\|}{\|y_i\|} \frac{\varepsilon}{4} + \|y_i\| \frac{\varepsilon}{2\|y_i\|} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

(ii) $f_0 \in B_{X^*}$, $r > 0$ fest, beliebig. Wir müssen zeigen, dass es eine Umgebung V bezüglich $\tau(X^*, X)$ gibt mit $V \subseteq B_r^d(f_0) = \{f \in B_{X^*} \mid d(f, f_0) < r\} =: U$. Sei

$$V = \{f \in B_{X^*} \mid |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon,\, i = 1, \ldots, k\}.$$

Zu wählen ist ε, k. Für $f \in V$ ist

$$\begin{aligned} d(f, f_0) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n\rangle| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_k\rangle| \\ &\leq \varepsilon + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r, \end{aligned}$$

wenn wir $\varepsilon < \frac{r}{2}$ und $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$ wählen. ■

• Die Umkehrung von Satz 4.12 gilt: Wenn B_{X^*} bezüglich $\tau(X^*, X)$ metrisierbar ist, so ist X separabel.

4.13 Satz. *Sei X ein Banachraum so, dass X^* separabel ist. Dann ist B_X metrisierbar bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$.*

Beweis : Wortwörtlich wie der Beweis von Satz 4.12, vertausche die Rolle von X und X^*. ■

4.14 Folgerung. *Sei X ein separabler Banachraum und sei $(f_n) \subseteq X^*$ beschränkt. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$, die bezüglich der $*$-schwachen Topologie konvergiert.*

Beweis : OBdA sei $\|f_n\| \leq 1$. Nach Satz 3.10 ist B_{X^*} kompakt bezüglich $\tau(X^*, X)$ und nach Satz 4.12 ist B_{X^*} metrisierbar bezüglich $\tau(X^*, X)$, aber nach Kapitel 0 Satz 2.4 sind kompakt und folgenkompakt äquivalent. ■

4.15 Satz. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $(x_n) \subseteq X$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ die bezüglich der schwachen Topologie konvergiert.*

Beweis : OBdA sei $\|x_n\| \leq 1$. Sei M_0 der Vektorraum über $\mathbb{R}$, der durch (x_n) generiert wird. Setze $M = \overline{M_0}$. Analog zu Satz 4.10 sieht man, dass M separabel ist. Außerdem ist M ein abgeschlossener, linearer Unterraum

von X, also ist nach Lemma 4.6 (i) M reflexiv und wegen Satz 4.2 ist die Einheitskugel $B_M = \{x \in M \,\big|\, \|x\| \leq 1\}$ kompakt bezüglich $\tau(M, M^*)$.
Da M separabel ist, ist nach Folgerung 4.11 auch M^* separabel und mit Satz 4.12 ist $B_{M^{**}}$ metrisierbar bezüglich $\tau(M^{**}, M^*)$. Da M reflexiv ist, ist $J(B_M) = B_{M^{**}}$ und $J(M) = M^{**}$, also ist B_M metrisierbar bezüglich $\tau(M, M^*)$. Nach Kapitel 0 Satz 2.4 ist eine Menge eines metrischen Raumes kompakt genau dann, wenn sie folgenkompakt ist, also gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$, die bezüglich $\tau(M, M^*)$ konvergiert, d.h. für alle $f \in M^*$ gilt:

$$\langle f, x_{n_k} \rangle \to \langle f, x \rangle.$$

Aber (x_{n_k}) konvergiert auch bezüglich $\tau(X, X^*)$, denn für alle $f \in X^*$ ist $f|_M \in M^*$ und da $(x_{n_k}) \subseteq M$ erhalten wir

$$\langle f, x_{n_k} \rangle = \langle f|_M, x_{n_k} \rangle \to \langle f|_M, x \rangle = \langle f, x \rangle.$$

■

• Es gilt die Umkehrung von Satz 4.15: Sei X ein Banachraum so, dass alle beschränkten Folgen eine schwach konvergente Teilfolge besitzen. Dann ist X reflexiv.

4.16 Lemma. *Sei C eine abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven Banachraumes X. Das Funktional $f \colon C \to (-\infty, \infty]$ sei konvex, unterhalbstetig und koerziv, d.h. $f(u) \to \infty$ für $\|u\| \to \infty$, $u \in C$. Dann besitzt f auf C ein Minimum. Die Begriffe „abgeschlossen“ und „unterhalbstetig“ sind bezüglich der starken Topologie gemeint.*

Beweis : O.B.d.A. können wir annehmen, dass f nichttrivial ist, d.h. $f \not\equiv \infty$. Sei $(u_n) \subset C$ eine Minimalfolge von f, d.h.

$$f(u_n) \to \inf_{v \in C} f(v) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Aufgrund der Koerzivität von f muss die Folge (u_n) beschränkt sein. Also gibt es nach Satz 4.15 eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$ $(k \to \infty)$, und Satz 2.11 liefert $u_0 \in C$. Sei nun $\varepsilon > 0$ fest, aber beliebig, und sei k_0 derart, dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$f(u_{n_k}) < \inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon\,. \tag{4.17}$$

Ferner gibt es, aufgrund von Folgerung 2.11, eine Folge $(v_j) \subset C$ von konvexen Linearkombinationen der u_{n_k}, die stark gegen u_0 konvergieren, d.h. $v_j = \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j u_{n_k}$, $0 \leq c_k^j \leq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{N_j} c_k^j = 1$ und $v_j \to u_0$, $j \to \infty$. Wegen der Konvexität des Funktionals f und (4.17) folgt

$$f(v_j) \leq \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j \, f(u_{n_k}) \leq \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j \,\big(\inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon\big) = \inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon\,. \tag{4.18}$$

In Banachräumen ist die Unterhalbstetigkeit äquivalent zur Bedingung

$$f(x_0) \leq \liminf_{x_n \to x_0} f(x_n)\,.$$

Beweis hiervon:

"$\Rightarrow$" f ist unterhalbstetig $\Leftrightarrow$ $\{f \leq \lambda_0\}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\{f > \lambda_0\}$ offen. Sei $x_n \to x_0$ und $f(x_0) > \liminf f(x_n) =: \lambda_0$, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $x_0 \in \{f > \lambda_0 + \varepsilon_0\}$ offen. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subseteq \{f > \lambda_0 + \varepsilon_0\}$ und dann gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $x_n \in \{f > \lambda_0 + \varepsilon_0\}$, d.h. $f(x_n) > \lambda_0 + \varepsilon_0$, ein Widerspruch zur Definition von $\lambda_0 = \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$.

"$\Leftarrow$" Sei $\{f \leq \lambda_0\}$ nicht abgeschlossen, dann gibt es eine Folge $(x_n) \subseteq C$, $x_n \to x_0$ mit $x_n \in \{f \leq \lambda_0\}$ und $f(x_0) > \lambda_0$. Dann ist $\lambda_0 < f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lambda_0$, ein Widerspruch.

Aber $v_j \to u_0$, also erhalten wir aus (4.18)

$$f(u_0) \leq \liminf_{j\to\infty} f(v_j) \leq \inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich $f(u_0) = \inf_C f$, d.h. das Minimum wird angenommen. ∎

4.19 Satz. *Sei X ein reflexiver Banachraum und M eine beschränkte Teilmenge. Dann gibt es für alle Punkte x des Abschlusses von M bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X,X^*)$ eine Folge $(x_n) \subseteq M$, die schwach gegen x konvergiert, d.h. $x_n \to x$ bezüglich $\tau(X,X^*)$.*

Beweis : Sei $x \in \overline{M}^{\tau(X,X^*)}$ beliebig, aber fest.
(i) Es gibt eine abzählbare Menge $M_0 \subseteq M$ mit

$$x \in \overline{M_0}^{\tau(X,X^*)}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B^n := \underbrace{B_{X^*} \times \ldots \times B_{X^*}}_{\text{n-mal}}$. Dann ist für $m \in \mathbb{N}$ und $(f_1,\ldots,f_n) \in B^n$

$$V := \{y \in X \,\big|\, |\langle f_j, y - x\rangle| < \frac{1}{m},\ j = 1,\ldots,n\} \subseteq X$$

Umgebung von x bezüglich $\tau(X,X^*)$. Da $x \in \overline{M}$ ist, gibt es ein $v \in M \cap V$, d.h.

$$|\langle f_j, v - x\rangle| < \frac{1}{m} \quad \forall\, j = 1,\ldots,n. \tag{4.20}$$

Für $v \in M$ fest, aber beliebig setzen wir

$$W_v := W = \{(f_1, \ldots, f_n) \in B^n \,\big|\, (4.20)\,\text{gilt}\} \subseteq (X^*)^n.$$

Da X reflexiv ist, folgt mit Lemma 4.6 (iii), dass auch X^* reflexiv ist, also stimmen die schwache und die $*$-schwache Topologie überein, d.h. W ist bezüglich $\tau(X^*, X^{**})^n$ offen. Da X^* reflexiv ist, ist nach Satz 4.2 B_{X^*} kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X^*, X^{**})$, also ist auch B^n kompakt in $(X^*)^n$ bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X^*, X^{**})^n$. Nach Definition von V ist

$$B^n \subseteq \bigcup_{v \in M} W_v$$

und da B^n kompakt ist, gibt es sogar eine endlich Teilüberdeckung, d.h.

$$B^n \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} W_{v_j}$$

d.h. die Menge $S_{nm} := \{v_j,\, j = 1, \ldots, k\}$ ist derart, dass es für alle $(f_1, \ldots, f_k)$ ein $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ gibt mit

$$|\langle f_i, v_{j_0} - x\rangle| < \frac{1}{m} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Setze $M_0 = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} S_{nm}$, d.h. für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und für alle $(f_1, \ldots, f_n) \in B^n$ gibt es ein $y \in M_0$, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$

$$|\langle f_i, y - x\rangle| < \frac{1}{m}$$

d.h. $x \in \overline{M_0}^{\tau(X,X^*)}$.

(ii) Sei X_0 kleinster linearer, abgeschlossener Teilraum von X, der x und M_0 enthält. Nach Lemma 4.6 (i) ist X_0 reflexiv und separabel. Nach (i) ist $x \in \overline{M_0}^{\tau(X,X^*)}$, dann ist auch $x \in \overline{M_0}^{\tau(X_0,X_0^*)}$, denn sei $f \in X_0^*$ ein lineares, stetiges Funktional, dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach eine Fortsetzung $\tilde{f} \in X^*$ mit $\tilde{f}|_{X_0} = f$. Da M beschränkt ist, gibt es ein $R > 0$ so, dass

$$M_0 \subseteq M \subseteq \overline{B_R(0)} =: K.$$

Da X_0 reflexiv und separabel ist, folgt mit Folgerung 4.10, dass X_0^* auch separabel ist und nach Satz 4.13 ist K metrisierbar bezüglich $\tau(X_0, X_0^*)$, es gibt also eine Folge $(x_n) \subseteq M_0$, die bezüglich $\tau(X_0, X_0^*)$ schwach gegen x konvergiert. Für alle $f \in X_0^*$ ist also $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, aber da $X^* \subseteq X_0^*$ ist auch $\forall\, f \in X^* \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, d.h. $x_n \rightharpoonup x$ bezüglich $\tau(X, X^*)$. ∎

4.21 Definition. *Ein Banachraum heißt* ***gleichmäßig konvex*** *genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass für alle $x, y \in B_X$, d.h. $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, mit $\|x - y\| > \varepsilon$ folgt $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$.*

• X ist gleichmäßig konvex $\Rightarrow$ B_X ist "rund"

Beispiele - $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik, dann kann man ε und δ explizit berechnen.
- $\mathbb{R}^2$ mit der Norm $\|x\| := |x_1| + |x_2|$ ist nicht gleichmäßig konvex.
- $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ ist gleichmäßig konvex,
- L^1, L^∞, $C(\overline{\Omega})$ nicht.

4.22 Satz (Milman-Pettis). *Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.*

Beweis : Sei $\omega \in X^{**}$ mit $\|\omega\| = 1$. Zu zeigen ist, dass $\omega \in J(B_X)$ ist, dann folgt durch Skalieren die Behauptung. $J(B_X)$ ist abgeschlossen. In der Tat, sei $(\omega_n) \subseteq J(B_X)$ eine Folge mit $\omega_n \to \omega$ in X^{**}. Es gibt eine Folge $(x_n) \subseteq B_X$ mit $\omega_n = J(x_n)$, dann gilt:

$$\|x_n - x_m\| = \|J(x_n) - J(x_m)\| = \|\omega_n - \omega_m\|,$$

und da (ω_n) eine Cauchyfolge ist, ist es auch (x_n), es gibt also ein $x \in B_X$: $x_n \to x$. Dann gilt auch

$$\omega_n = J(x_n) \to J(x),$$

d.h. $\omega \in J(B_X)$. Es reicht also zu zeigen, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $x \in B_X$ gibt mit

$$\|\omega - J(x)\| \leq \varepsilon.$$

Sei also $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein δ aus Definition 4.21. Sei $f \in X^*$, $\|f\| = 1$ und

$$\langle \omega, f \rangle > 1 - \frac{\delta}{2}. \tag{4.23}$$

Diese Wahl ist möglich, da $\|f\| = \sup\limits_{\|\omega\|_{X^{**}} \leq 1} \langle \omega, f \rangle$. Setze

$$V := \{\eta \in X^{**} \bigm| |\langle \eta - \omega \rangle| < \frac{\delta}{2}\}.$$

Dies ist eine Umgebung von ω bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Nach Lemma 4.4 ist $J(B_X)$ dicht in $B_{X^{**}}$, also ist $J(B_X) \cap V \neq \emptyset$. Sei $x \in B_X$ mit $J(x) \in V$. Wir zeigen durch einen Widerspruch:

$$\omega \in J(x) + \varepsilon B_{X^{**}}.$$

Sei also $\omega \in X^{**} \setminus (J(x) + \varepsilon B_{X^{**}}) =: W$. W ist offen bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$, W ist also offene Umgebung von ω. Nach Lemma 4.4 ist $(V \cap W) \cap J(B_X) \neq \emptyset$, es gibt also ein $\hat{x} \in B_X : J(\hat{x}) \in V \cap W$, d.h. $J(\hat{x}) \in V$ und nach Voraussetzung war $J(x) \in V$, d.h.

$$|\langle f, x \rangle - \langle \omega, f \rangle| = |\langle J(x), f \rangle - \langle \omega, f \rangle| < \frac{\delta}{2}$$

und

$$|\langle f, \hat{x} \rangle - \langle \omega, f \rangle| < \frac{\delta}{2}.$$

Also gilt

$$2\langle \omega, f \rangle < \delta + \langle f, x + \hat{x} \rangle \overset{\|f\| \leq 1}{\leq} \delta + \|x + \hat{x}\|$$

Mit (4.24) gilt dann

$$1 - \frac{\delta}{2} < \langle \omega, f \rangle < \frac{\delta}{2} + \|\frac{x + \hat{x}}{2}\|.$$

Da X gleichmäßig konvex ist, ist $\|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon$, aber $J(\hat{x}) \in W \Rightarrow \|x - \hat{x}\| = \|J(x) - J(\hat{x})\| > \varepsilon$, ein Widerspruch. ∎

4.24 Satz. *Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum und sei (x_n) eine schwach konvergente Folge mit*

$$\limsup_{n \to \infty} \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Dann konvergiert x_n stark gegen x.

Beweis : OBdA sei $x \neq 0$. Sei $\lambda_n := \max(\|x_n\|, \|x\|)$, dann ist sofort klar, dass $\lambda_n \to \|x\|$. Außerdem definieren wir

$$y_n := \frac{x_n}{\lambda_n}, \qquad y := \frac{x}{\|x\|}.$$

Wenn $x_n \rightharpoonup x$ folgt, dass $y_n \rightharpoonup y$, denn für $f \in X^*$ gilt:

$$\begin{aligned} |\langle f, y_n \rangle - \langle f, y \rangle| &\leq |\langle f, \frac{x_n}{\lambda_n} - \frac{x_n}{\|x\|} \rangle| + |\langle f, \frac{x_n}{\|x\|} - \frac{x}{\|x\|} \rangle| \\ &\leq \|f\| \underbrace{\|x_n\|}_{\leq K} \underbrace{\left| \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\|x\|} \right|}_{\to 0} + \frac{1}{\|x\|} \underbrace{|\langle f, x_n - x \rangle|}_{\to 0} \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass $\|y\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\frac{y_n+y}{2}\|$, aber da $\|y\| = 1$ und $\|y_n\| \leq 1$ folgt

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} \|\frac{y_n + y}{2}\| \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\|y_n\| + \|y\|) = 1.$$

Dann sieht man, dass $\|\frac{y_n+y}{2}\| \to 1$ und da X gleichmäßig konvex ist, folgt $y_n - y \to 0$, also auch $x_n \to x$. ∎