Kapitel 4

Lebesgueräume L^p

4.1 Wiederholung

Im Weiteren ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ immer eine offene Menge. Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Lebesguemaß, welches wir mit dx bezeichnen. Für messbare Mengen M bezeichnen wir mit $|M|$ das Lebesguemaß von M.
Die Relation „$f = g$ fast überall“ ist offensichlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge der messbaren Funktionen. Man kann also eine gegebene Funktion f auf einer beliebigen Nullmenge beliebig umdefinieren und bleibt in der gleichen Äquivalenzklasse. Im Weiteren werden wir nicht zwischen der Funktion f und ihrer Äquivalenzklasse $[f]$ unterscheiden. (Etwas ungenau aber sehr praktisch.)

1.1 Definition. *Sei $1 \le p < \infty$. Wir bezeichnen mit $L^p = L^p(\Omega)$ die Menge aller Lebesgue–messbaren Funktionen f mit*

$$\int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \, .$$

Die Größe

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

heißt L^p-Norm der Funktion $f \in L^p$. Mit $L^\infty = L^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller messbaren Funktionen f für die eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|f| \le K \qquad \textit{fast überall.}$$

Die Größe

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ |M| = 0}} \ \sup_{x \in X \setminus M} |f(x)| \tag{1.3}$$

heißt L^∞-Norm der Funktion $f \in L^\infty$.

Dass die so definierten Größen wirklich Normen sind basiert auf folgenden Ergebnissen.

1.4 Lemma (Young–Ungleichung). *Sei $p, q \in (1, \infty)$ mit $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Für nichtnegative Zahlen a, b gilt*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Beweis : Analysis III, Lemma 6.14 ■

1.5 Lemma (Hölder–Ungleichung). *Sei $f \in L^p$ und $g \in L^q$ mit $p, q \in [1, \infty]$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$.*[1] *Dann ist $fg \in L^1$ und es gilt:*

$$\left| \int\limits_\Omega f g\, dx \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \,.$$

Beweis : Analysis III, Satz 6.15 ■

1.6 Lemma (Minkowski–Ungleichung). *Sei $p \in [1, \infty]$ und $f, g \in L^p$. Dann ist $f + g \in L^p$ und es gilt:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

Beweis : Analysis III, Satz 6.16 ■

1.7 Satz. *Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\big(L^p, \|\cdot\|_p\big)$ ein normierter Vektorraum.*

Beweis : Analysis III, Satz 6.13 ■

1.8 Satz (Fischer– Riesz). *Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\big(L^p, \|\cdot\|_p\big)$ vollständig, also ein Banachraum.*

Beweis : Analysis III, Satz 6.18 ■

1.9 Lemma. *Sei $(f_n) \subset L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ eine Folge, die stark gegen $f \in L^p$ konvergiert. Dann existiert eine Teilfolge (f_{n_k}) die fast überall gegen f konvergiert.*

Beweis : Analysis III, Folgerung 6.19 ■

Sätze über das Vertauschen von Integral und Grenzwert haben eine zentrale Bedeutung in der Integrationstheorie und ihren Anwendungen.

[1] Wir benutzen die Konvention, dass $p = 1, q = \infty$ in der Identität $q^{-1} + p^{-1} = 1$ enthalten ist.

1.10 Satz (Levi, monotone Konvergenz). *Sei $\{f_n\}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n \nearrow f$ fast überall und sei $\int_\Omega f_1\, dx > -\infty$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n\, dx = \int\limits_\Omega f\, dx\,.$$

Beweis : Analysis III, Satz 6.2 ■

1.11 Satz (dominierte Konvergenz). *Sei $\{f_n\}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n \to f$ fast überall. Wenn es eine Funktion $h \in L^1$ gibt mit $|f_n| \le h$ fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $f \in L^1$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n\, dx = \int\limits_\Omega f\, dx\,.$$

Beweis : Analysis III, Satz 6.6 ■

1.12 Satz (Verallgemeinerter Satz über die dominierte Konvergenz). *Seien $\{f_n\}$ und $\{h_n\}$ Folgen aus L^1, die fast überall gegen f bzw. h, ebenfalls aus L^1, konvergieren. Weiterhin gelte $|f_n| \le h_n$ und*

$$\int_\Omega h_n\, dx \to \int_\Omega h\, dx \qquad (n \to \infty)\,.$$

Dann folgt

$$\int_\Omega |f_n - f|\, dx \to 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Beweis : Übungsblatt 9, Analysis III ■

1.13 Lemma (Fatou). *Sei $\{f_n\}$ eine Folge messbarer Funktionen und $g \in L^1$. Aus $f_n \ge g$ fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt*

$$\int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\, dx \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n\, dx\,.$$

Beweis : Analysis III, Lemma 6.5 ■

Weitere wichtige Sätze sind:

1.14 Satz (Lusin). *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $|A| < \infty$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K = K(\varepsilon) \subseteq A$ so, dass* *(i)* $|A \setminus K| < \varepsilon$;

(ii) $f|_K$ *ist stetig.*

Beweis : Analysis III, Satz 5.5 ∎

1.15 Satz (Egorov). *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *messbar mit* $|A| < \infty$ *und seien* $f_n : A \to \mathbb{R}$ *messbare Funktionen mit* $f_n \to g$ *fast überall. Dann existiert für alle* $\varepsilon > 0$ *eine messbare Menge* $B \subseteq A$ *mit*

(i) $|A \setminus B| < \varepsilon$,

(ii) $f_k \rightrightarrows g$ *gleichmäßig auf* B.

Beweis : Analysis III, Satz 5.9 ∎

1.16 Satz (Fubini). *Sei* $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Dann gilt für fast alle* $x \in \Omega_1$

$$f(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)\,, \qquad \int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy \in L^1(\Omega_1)\,,$$

und für fast alle $y \in \Omega_2$

$$f(\cdot, y) \in L^1(\Omega_1)\,, \qquad \int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx \in L^1(\Omega_2)\,.$$

Weiterhin gilt

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,d(x\times y)\,.$$

Beweis : Analysis III, Satz 7.13 ∎

Wir bezeicnen mit $C(\overline{\Omega})$ die Menge aller gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Versehen mit der $\|\cdot\|_\infty$ Norm bildet $C(\overline{\Omega})$ einen Banachraum. Mit $C^k(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in C(\overline{\Omega})$, deren partielle Ableitungen $\partial^\alpha f$, $|\alpha| \le k$, zum Raum $C(\overline{\Omega})$ gehören. Wir setzen $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega})$. Mit $C_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, bzw. $C_0^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir die Teilräume von $C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, bzw. $C^\infty(\overline{\Omega})$ von Funktionen mit kompaktem Träger.

1.17 Satz. *Sei* $1 \le p < \infty$. *Dann gibt es zu jedem* $f \in L^p(\Omega)$ *eine Folge* $f_k \in C_0(\Omega)$ *mit* $\|f - f_k\|_p \to 0$.

Beweis : Analysis III, Satz 6.23 ∎

Wichtige Hilfsmittel sind die Flatung und der Glättungsoperator.

1.18 Satz (Definition der Faltung). *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Faltung von f mit g ist die fast überall definierte Funktion*

$$f * g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}},\ (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Es gilt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sowie

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \, \|g\|_1 .$$

Beweis : Analysis III, Satz 11.2 ■

1.19 Definition. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Sei J eine nichtnegative Funktion aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit den Eigenschaften*

i) $J(x) = 0$, *falls* $\|x\| \geq 1$;

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)\,dx = 1$.

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $J_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon)$, welche die Eigenschaften

i) $J_\varepsilon(x) = 0$, *falls* $\|x\| \geq \varepsilon$;

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x)\,dx = 1$

hat. J_ε heißt ***Glättungsoperator*** *und die Faltung*

$$(J_\varepsilon * f)(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy\,,$$

welche für Funktionen f definiert ist, für die die rechte Seite Sinn macht, heißt ***Regularisierung von*** *f.*

- Ein typisches Beispiel für J ist

  $$J(x) = \begin{cases} k\,\exp\left(\frac{-1}{1-\|x\|^2}\right), & \text{falls } \|x\| \leq 1\,, \\ 0, & \text{falls } \|x\| \geq 1\,, \end{cases}$$

  wobei k eine Normierungskonstante ist.

1.20 Satz. *Sei Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ sei außerhalb Ω identisch Null und $\varepsilon > 0$.*

(i) Für $f \in L^1(\Omega)$ gilt $J_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(*ii*) *Falls* [2] $\operatorname{supp}(f) \subseteq\subseteq \Omega$, *dann ist* $J_\varepsilon * f \in C_0^\infty(\Omega)$ *für* $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f),\ \partial\Omega)$.

(*iii*) *Für* $f \in L^p(\Omega),\ 1 \le p < \infty$, *gilt:* $J_\varepsilon * f \in L^p(\Omega)$ *und*

$$\|J_\varepsilon * f\|_p \le \|f\|_p \,,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|J_\varepsilon * f - f\|_p = 0\,.$$

(*iv*) *Für* $f \in C(\Omega)$ *und* $K \subseteq\subseteq \Omega$ *gilt:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon * f(x) = f(x) \qquad \textit{gleichmäßig auf } K\,.$$

Beweis : Analysis III, Satz 11.4 ■

1.21 Satz. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge. Dann ist* $C_0^\infty(\Omega)$ *dicht in* $L^p(\Omega)$ *für* $1 \le p < \infty$.

Beweis : Analysis III, Folgerung 11.6 ■

1.22 Definition. *Sei* $1 \le p \le \infty$. *Die messbare Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *liegt in* $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *falls* $\chi_K f \in L^p(\Omega)$ *für alle kompakten Mengen* $K \subset \Omega$.

1.23 Folgerung. *Für die Funktion* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *gelte*

$$\int_\Omega f\varphi\, dx \ge 0 \ \textit{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \textit{ mit } \varphi \ge 0.$$

Dann folgt $f(x) \ge 0$ *für fast alle* $x \in \Omega$.

Beweis : Analysis III, Folgerung 11.8 ■

1.24 Lemma. *Sei* $\tau_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$ *die Translation um* $h \in \mathbb{R}^n$. *Für* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *mit* $1 \le p < \infty$ *gelten folgende Aussagen:*

(i) $f \circ \tau_h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und* $\|f \circ \tau_h\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$.

(ii) $\|f \circ \tau_h - f\|_{L^p} \to 0$ *für* $h \to 0$.

Beweis : Analysis III, Lemma 11.1 ■

[2] Man schreibt $K \subseteq\subseteq \Omega$ falls $\overline{K} \subseteq \Omega$ und $\overline{K}$ kompakt ist.

1.25 Satz (Arzela–Ascoli). *Sei Ω einn beschränktes Gebiet und sei $(f_n) \subset C(\overline{\Omega})$ eine Folge gleichgradig stetiger Funktionen, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| \le \delta$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|f_n(x + h) - f_n(x)| \le \varepsilon$, die gleichmäßig beschränkt sind, d.h. es existiert ein $K > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \Omega$ gilt: $|f_n(x)| \le K$. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ die gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$ gegen eine Funktion $f \in C(\overline{\Omega})$ konvergiert.*

Beweis : Analysis II, Satz 12.9 ■

Die Aussage des Stzes gilt analog, wenn man $\overline{\Omega}$ durch einen beliebigen kompakten metrischen raum ersetzt.

4.2 Reflexivität, Separabilität, Dualräume und Kompaktheit

2.1 Definition. *Eine Young-Funktion $g : \mathbb{R}^{\ge 0} \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ heißt **gleichmäßig konvex** genau dann, wenn für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ ein $\delta \in (0, 1)$ existiert, so dass für alle $s \ge 0$ und $\gamma \in [0, \varepsilon]$ gilt:*

$$g\Big(\frac{1+\gamma}{2}s\Big) \le (1-\delta)\frac{1}{2}\big(g(s) + g(\gamma s)\big). \tag{2.2}$$

• Eine Young-Funktion war definiert durch $g(s) = \int\limits_0^s \gamma(t)dt$, wobei γ rechtsseitig stetig, nicht fallend, $\gamma(s) > 0$ für $s > 0$, $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(s) \nearrow \infty$.

• $g(s) = s^p$, $1 < p < \infty$ ist für $s \ge 0$ gleichmäßig konvex, denn

$$\Big(\frac{1+\gamma}{2}s\Big)^p \le (1-\delta)\frac{1}{2}(s^p + (\gamma s)^p)$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-p}\frac{(1+\gamma)^p}{1+\gamma^p} \le 1-\delta.$$

Sei also $f(\gamma) := 2^{1-p}\frac{(1+\gamma)^p}{1+\gamma^p}$. Wir müssen zeigen, dass $f(\gamma) \le 1 - \delta$ ist für $\gamma \in [0, \varepsilon]$. f ist wachsend auf $[0, 1]$ und stetig, nimmt also Maximum und Minimum an. Wähle also $\gamma = \varepsilon$, dann ergibt sich

$$f(\varepsilon) = 2^{1-p}\frac{(1+\varepsilon)^p}{1+\varepsilon^p} =: 1-\delta.$$

2.3 Satz. *Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex.*

• Ein Banachraum X hieß gleichmäßig konvex $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$: $\forall \|u\|, \|v\| \leq 1$ und $\|u-v\| > \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2}\|x+y\| < 1-\delta$.

Beweis : Seien $u, v \in L^p$ mit $\|u\|_p, \|v\|_p \leq 1$ und $\|u-v\|_p > \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Sei

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0} : \; s \mapsto |s|^p,$$

dann ist $\varphi(s) = g(|s|)$ mit $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0} : \; s \mapsto s^p$. Für alle $\varepsilon \in (0,1)$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle a, $b \in \mathbb{R}$ mit $|a-b| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \max(|a|,|b|)$ gilt:

$$\varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq (1-\delta)\frac{1}{2}\big(\varphi(a)+\varphi(b)\big). \tag{2.4}$$

Dies folgt sofort aus (2.2). In der Tat, sei $|b| \leq |a| =: s$. Dann gibt es ein $\tau \in [-1,1]$ mit $b = \tau a$ und obige Voraussetzung an a und b lässt sich schreiben als:

$$|a-b| = |a||1-\tau| = s(1-\tau) \geq \Big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\Big)^{\frac{1}{p}} s \Leftrightarrow \tau \geq 1 - \Big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Fall: $\tau \in [-1,0] \Leftrightarrow |a+b| = |a|(1+\tau) \leq |a|$

$$\begin{aligned} \varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = g\Big(\frac{|a+b|}{2}\Big) &= g\Big(\frac{s(1+\tau)}{2}\Big) \\ &\leq g\Big(\frac{s}{2}(1+0)\Big) \\ &\overset{(2.2)}{\leq} (1-\delta)\frac{1}{2}(g(s)+g(0)) \\ &\leq (1-\delta)\frac{1}{2}(g(s)+g(|\tau|s)) \\ &= (1-\delta)\frac{1}{2}(\varphi(a)+\varphi(b)) \end{aligned}$$

2. Fall: $\tau \in [0, 1-\left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}]$

$$\begin{aligned} \varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= g\Big(|\frac{a+b}{2}|\Big) \\ &= g\Big(s\frac{1+\tau}{2}\Big) \\ &\overset{(2.2)}{\leq} (1-\delta)\frac{1}{2}(g(s)+g(s\tau)) \\ &= (1-\delta)\frac{1}{2}(\varphi(a)+\varphi(b)). \end{aligned}$$

Setze

$$A := \{x \in \Omega \,\big|\, |u(x) - v(x)| \geq \big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}} \max(|u(x)|, |v(x)|)\},$$

dann folgt aus (2.4), dass für alle $x \in A$ gilt:

$$\varphi\Big(\frac{u(x) + v(x)}{2}\Big) \leq (1 - \delta)\frac{1}{2}\big(\varphi(u(x)) + \varphi(v(x))\big). \tag{2.5}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
1 - \int\limits_{\Omega} \Big|\frac{u+v}{2}\Big|^p dx &= 1 - \int\limits_{\Omega} \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big) dx \\
&\overset{\|u\|_p, \|v\|_p \leq 1}{\geq} \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \varphi(u) + \varphi(v) dx - \int\limits_{\Omega} \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big) dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int\limits_{A} \varphi(u) + \varphi(v) dx - \int\limits_{\Omega} \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big) dx \\
&\overset{(2.5)}{\geq} \frac{1}{2} \int\limits_{A} \varphi(u) + \varphi(v) dx - (1 - \delta)\frac{1}{2} \int\limits_{A} \varphi(u) + \varphi(v) dx \\
&= \frac{\delta}{2} \int\limits_{A} \varphi(u) + \varphi(v) dx,
\end{aligned}$$

wobei wir die Zerlegung $\Omega = (\Omega \setminus A) \cup A)$ und die Konvexität von φ auf $\Omega \setminus A$ benutzt haben. Insgesamt erhalten wir also

$$1 - \int \Big|\frac{u+v}{2}\Big|^p dx \geq \frac{\delta}{2} \int\limits_{A} \varphi(u) + \varphi(v) dx. \tag{2.6}$$

Für $x \in \Omega \setminus A$ ist $|u(x) - v(x)| \leq \big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}}(|u(x)| + |v(x)|)$, also $\varphi(u - v) \leq \varphi\Big(\big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}}(|u| + |v|)\Big) \leq \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\varphi(|u| + |v|)$, da $\varphi(s) = |s|^p$. Wenn wir nun das Integral über $\Omega \setminus A$ bilden, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega \setminus A} \varphi(u - v) dx &= \frac{\varepsilon}{2^p} \int\limits_{\Omega \setminus A} \varphi(|u| + |v|) dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2^p} 2^{p-1} \int\limits_{\Omega \setminus A} \varphi(u) + \varphi(v) dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

da $\varphi(u+v) = \varphi(\frac{1}{2}(2u+2v)) = \frac{1}{2}(\varphi(2u)+\varphi(2v)) = 2^{p-1}(\varphi(u)+(\varphi(v))$ und $\|u\|,\ \|v\| \leq 1$. Also

$$\int\limits_{\Omega\setminus A} \varphi(u-v)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.7}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_A \varphi(u-v)dx &= \int\limits_\Omega \varphi(u-v)dx - \int\limits_{\Omega\setminus A} \varphi(u-v)dx \\
&\overset{(2.7)}{\geq} \int\limits_\Omega \varphi(u-v)dx - \frac{\varepsilon}{2} \\
&> \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

aufgrund von $\|u-v\|_p > \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2} < \int\limits_A \varphi(u-v)dx &\leq \frac{1}{2}\int\limits_A \varphi(2u)+\varphi(2v)dx \\
&= \frac{2^p}{2}\int\limits_A \varphi(u)+\varphi(v)dx \\
&\overset{(2.6)}{\leq} 2^{p-1}\frac{2}{\delta}\Big(1 - \int \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big)\Big)dx
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2} < \frac{2^p}{\delta}\Big(1 - \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_p^p\Big) &\Leftrightarrow \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_p^p \leq 1 - \frac{\varepsilon\delta}{2^{p+1}} \\
&\Leftrightarrow \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_p \leq 1 - \tilde{\delta}(\delta,\varepsilon,p)
\end{aligned}$$

■

2.8 Folgerung. *Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.*

Beweis : Satz 2.3 und Satz 4.22 aus Kapitel 3.1. ■

• Die entscheidende Ungleichung (2.4) kann man für $\varphi(s) = |s|^p$, $1 < p < \infty$ direkt nachrechnen. Betrachte die Funktion

$$f(\tau) := 2^{1-p}\frac{(1+\tau)^p}{1+|\tau|^p} \qquad \tau \in [-1, 1 - \big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}}],$$

sie erreicht ihr Maximum bei $\tau = 1$.

• Beweis hier funktioniert auch für Orliczräume, falls die Young-Funktion g die **Δ_2-Bedingung** erfüllt, d.h. es gibt ein $K > 0$, so dass für alle $s \geq 0$ gilt

$$g(2s) \leq K g(s).$$

Der Orliczraum L_g ist gleichmäßig konvex, wenn g gleichmäßig konvex ist und der Δ_2-Bedingung genügt.

• Nun betrachten wir die Dualräume.

2.9 Satz (Riesz). *Sei $1 < p < \infty$ und sei $f \in (L^p(\Omega))^*$. Dann existiert genau eine Funktion $g \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, so dass für alle $u \in L^p(\Omega)$ gilt:*

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega g u \, dx. \tag{2.10}$$

Weiterhin gilt:

$$\|g\|_{p'} = \|f\|_{(L^p(\Omega))^*}. \tag{2.11}$$

Umgekehrt definiert jedes $g \in L^{p'}(\Omega)$ durch (2.10) ein stetiges lineares Funktional auf $L^p(\Omega)$.

Beweis : Wir definieren die Abbildung $T : L^{p'}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ durch:

$$\langle Tg, u \rangle := \int_\Omega g u \, dx \qquad u \in L^p(\Omega),\ g \in L^{p'}(\Omega).$$

Offensichtlich ist T linear. Außerdem folgt mit der Hölder-Ungleichung

$$|\langle Tg, u \rangle| \leq \|g\|_{p'} \|u\|_p,$$

d.h. $Tg \in (L^p(\Omega))^*$ und somit

$$\|Tg\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_{p'}, \tag{2.12}$$

und die Rückrichtung ist bewiesen. Nun beweisen wir (2.11). Wähle dazu

$$u_0(x) = \begin{cases} |g(x)|^{p'-2} g(x) & \text{für } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{für } g(x) = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $u_0 \in L^p(\Omega)$, denn mit $p' = \frac{p}{p-1}$ und $p' - 1 = \frac{1}{p-1}$ gilt

$$\int_\Omega |u_0|^p dx = \int_{\{g \neq 0\}} |g|^{(p'-1)p} dx = \int_{\{g \neq 0\}} |g|^{\frac{p}{p-1}} dx < \infty,$$

da $g \in L^{p'}(\Omega)$. D.h. $\|u_0\|_p^p = \|g\|_{p'}^{p'}$ und somit $\|u_0\|_p = \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p-1}}$, u_0 ist also eine zulässige Testfunktion. Wenn wir diese einsetzen, ergibt sich

$$\langle Tg, u_0 \rangle = \int_\Omega g|g|^{p'-2} g \, dx = \int_\Omega |g|^{p'} = \|g\|_{p'}^{p'}$$

und somit

$$|g\|_{p'} = \frac{\langle Tg, u_0 \rangle}{\|g\|_{p'}^{p'-1}} = \frac{\langle Tg, u_0 \rangle}{\|u_0\|_p} \leq \frac{\|Tg\|_{(L^p)^*} \|u_0\|_p}{\|u_0\|_p} = \|Tg\|_{(L^p)^*}.$$

Zusammen mit (2.12) haben wir die Isometrieeigenschaft (2.11) bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass T surjektiv ist. Sei $E := T(L^p(\Omega)) = R(T)$, E ist also ein linearer Unterraum von $(L^p(\Omega))^*$. Da T eine lineare Isometrie ist, ist E abgeschlossen. In der Tat, sei (u_n) eine Folge in $L^p(\Omega)$, so dass $Tu_n \to v$ in $(L^p(\Omega))^*$ konvergiert. Dann ist

$$\|T(u_n - u_m)\| = \|u_n - u_m\|,$$

also ist auch (u_n) eine Cauchyfolge und konvergiert somit gegen ein u in $L^p(\Omega)$, d.h. $Tu_n \to Tu = v$.

Es reicht zu zeigen, dass E dicht in $(L^p(\Omega))^*$ ist. $L^p(\Omega)$ ist reflexiv, dann ist $J : L^p(\Omega) \to (L^p(\Omega))^{**}$ surjektiv. Sei $\varphi \in (L^p(\Omega))^{**}$ so, dass

$$\langle \varphi, Tg \rangle_{(L^p)^{**},(L^p)^*} = 0 \qquad \forall\, g \in L^p(\Omega),$$

d.h. $\varphi \in E^\perp \subseteq (L^p(\Omega))^{**}$, wobei wir $E^\perp$ bezüglich des Grundraums $X = (L^p)^*$ betrachten. Sei $\varphi = Jh$, $h \in L^p(\Omega)$. Solch ein h existiert, da L^p reflexiv ist. Also gilt

$$\langle \varphi, Tg \rangle = \langle Jh, Tg \rangle = \langle Tg, h \rangle,$$

d.h.

$$\int_\Omega gh \, dx = 0 \qquad \forall\, g \in L^{p'}(\Omega).$$

Nun wählen wir $g = |h|^{p-2}h$ und erhalten $\int |h|^p dx = 0$, woraus folgt $h = 0$ fast überall. Oder man folgert aus $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^{p'}(\Omega)$, dass nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung $h = 0$ ist. Dann ist auch $\varphi = 0$ und somit $E^\perp = \{0\}$. In den Übungen haben wir gezeigt, dass dann E dicht in $(L^p(\Omega))^*$ ist.

Zur Eindeutigkeit: Seien g_1, $g_2 \in L^{p'}(\Omega)$ mit

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega g_1 u \, dx = \int_\Omega g_2 u \, dx.$$

Dann ist für alle $u \in L^p(\Omega)$: $0 = \int_\Omega (g_1 - g_2)u\,dx$ und mit den gleichen Argumenten wie oben folgt, dass $g_1 = g_2$ fast überall ist. ∎

• Wir haben gezeigt, dass die lineare, surjektive Isometrie aus (2.10) existiert. Wir können also die beiden Räume identifizieren:

$$(L^p(\Omega))^* \cong L^{p'}(\Omega).$$

2.13 Satz. *Sei $f \in (L^1(\Omega))^*$. Dann existiert genau eine Funktion $g \in L^\infty(\Omega)$ so, dass für alle $u \in L^1(\Omega)$ gilt:*

$$\langle f, u\rangle = \int_\Omega g u\,dx. \tag{2.14}$$

Weiterhin gilt:

$$\|g\|_\infty = \|f\|_{(L^1)^*}.$$

Umgekehrt definiert jedes $g \in L^\infty(\Omega)$ durch (2.14) ein stetiges, lineares Funktional auf $L^1(\Omega)$.

Beweis : Sei $w(x) = (k+1)^{-\frac{n+1}{2}}$, $k < |x| \le k+1$. Dann ist $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |w|^2 dx &= \sum_k \int_{k<|x|\le k+1} \frac{1}{(k+1)^{n+1}} dx \\
&= \sum_k \frac{1}{(k+1)^{n+1}} \left| \{x \,|\, k < |x| \le k+1\} \right| \\
&\le c \sum_k \frac{k^{n-1}}{k^{n+1}} \\
&= c \sum_k \frac{1}{k^2} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Da $w > 0$ in $\mathbb{R}^n$ ist, gilt für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq \Omega :\ w|_K \ge \alpha_K > 0$, da $K \subseteq B_k(0)$ für geeignetes k. Wir definieren die Abbildung $\varphi \in (L^2(\Omega))^*$ durch

$$\varphi : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} :\ v \mapsto \langle f, wv\rangle.$$

Es gilt: φ ist linear (klar) und stetig, denn

$$|\langle \varphi, v\rangle| = |\langle f, wv\rangle| \le \|f\|_{(L^1)^*}\|wv\|_1 \le \|f\|_{(L^1)^*}\|w\|_2\|v\|_2.$$

Nach Satz 2.9 gibt es also ein $h \in L^2(\Omega)$, so dass für alle $v \in L^2(\Omega)$ gilt:

$$\langle f, wv\rangle = \langle \varphi, v\rangle = \int_\Omega hv\,dx. \tag{2.15}$$

Setze nun $g(x) := \frac{h(x)}{w(x)}$. g ist wohldefiniert, da $w > 0$ auf Ω und g messbar ist. Zu zeigen ist, dass $g \in L^\infty(\Omega)$ ist. Nach (2.15) gilt für alle $v \in L^2(\Omega)$:

$$|\int_\Omega hv\,dx| \leq \|f\|_{(L^1)^*}\|wv\|_1. \tag{2.16}$$

Für $c > \|f\|_{(L^1)^*}$ definiere

$$A := \{x \in \Omega \,\big|\, |g(x)| > c\}.$$

Es gilt: $|A| = 0$. Sei dem nicht so, dann gibt es ein $\tilde{A} \subseteq A$, das messbar ist, z.B. kompakt, mit $0 < |A| < \infty$. Betrachte

$$v_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in \tilde{A},\ g(x) > 0 \\ -1 & x \in \tilde{A},\ g(x) < 0 \\ 0 & x \in \Omega \setminus \tilde{A} \end{cases}$$

Dann ist $v_0 \in L^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Wenn wir dies in (2.16) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} |\int_\Omega hv_0\,dx| &\overset{h=gw}{=} |\int_{\tilde{A}} gw\ \mathrm{sgn}(g)\,dx| \\ &= \int_{\tilde{A}} |g|w\,dx \\ &\leq \|f\|_{(L^1)^*}\|wv_0\|_1 \\ &= \|f\|_{(L^1)^*}\int_{\tilde{A}} w\,dx, \end{aligned}$$

da $|v_0| = 1$ und $w > 0$. Dann folgt aus der Definition von A und weil $\tilde{A} \subseteq A$:

$$c\int_{\tilde{A}} w\,dx \leq \int_{\tilde{A}} |g|w\,dx \leq \|f\|_{(L^1)^*}\int_{\tilde{A}} w\,dx,$$

ein Widerspruch zu $c > \|f\|_{(L^1)^*}$. Also ist $|A| = 0$ und somit $|g(x)| \leq c$ fast überall, $g \in L^\infty(\Omega)$ und $\|g\|_\infty \leq \|f\|_{(L^1(\Omega))^*}$. Aus (2.15) und der Definition von g folgt, dass für alle $v \in L^2(\Omega)$ gilt:

$$\langle f, wv \rangle = \int_\Omega gwv \, dx. \tag{2.17}$$

Wähle für gegebenes $u \in C_0(\Omega)$ $v = \frac{u}{w}$ in (2.17). Da $w > \alpha_k > 0$ auf $K = \operatorname{supp} u$ ist, ist $v \in L^2(\Omega)$. Dann gilt für alle $u \in C_0(\Omega)$:

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega gu \, dx.$$

Da aber $C_0(\Omega)$ dicht in $L^1(\Omega)$ ist, gilt für alle $u \in L^1(\Omega)$:

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega gu \, dx.$$

In der Tat, für alle $u \in L^1(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_n) \subseteq C_0(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$. Dann folgt

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle,$$

da $f \in (L^1(\Omega))$, und wegen dem verallgemeinerten Satz über die dominierte Konvergenz (vgl. Ana III, Blatt 9)

$$\int_\Omega gu_n \, dx \to \int_\Omega gu \, dx.$$

Wir erhalten somit

$$|\langle f, u \rangle| = |\int gu \, dx| \leq \|g\|_\infty \|u\|_1$$

$$\Rightarrow \|f\|_{(L^1)^*} \leq \|g\|_\infty,$$

mit dem schon gezeigten folgt also die Gleichheit

$$\|f\|_{(L^1)*} = \|g\|_\infty.$$

Nun bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega g_1 u \, dx = \int_\Omega g_2 u \, dx,$$

d.h. $\int\limits_\Omega (g_1 - g_2)u\,dx = 0$, woraus $g_1 = g_2$ fast überall folgt. Die Rückrichtung ist klar mithilfe der Hölderungleichung. ■

• Identifiziere $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$ durch linearen, surjektiven Isomorphismus aus (2.14).

2.18 Folgerung. $L^1(\Omega)$ *ist nicht reflexiv.*

Beweis : OBdA sei $0 \in \Omega$. Betrachte $f_n = \alpha_n \chi_{B_{\frac{1}{n}}(0)}$, $\alpha_n = |B_{\frac{1}{n}}(0)|^{-1}$. Also gibt es ein n_0 derart, dass $B_{\frac{1}{n_0}}(0) \subseteq \Omega$, d.h. für alle $n \geq n_0$ gilt $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Dann ist auch

$$\int\limits_\Omega \alpha_n \chi_{B_{\frac{1}{n}}(0)} dx = 1.$$

Wenn $L^1(\Omega)$ reflexiv wäre, dann gäbe es mit Kapitel 3.1 Satz 4.15 eine Teilfolge, $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$, so dass

$$f_{n_k} \rightharpoonup f \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Da $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$ heißt das für alle $g \in L^\infty(\Omega)$

$$\int f_{n_k} g\,dx \to \int f g\,dx. \tag{2.19}$$

Für $g \in C_0(\Omega \setminus \{0\})$ ist $\int\limits_\Omega g f_{n_k} dx = 0$ und da für großes k $\operatorname{supp} g \cap B_{\frac{1}{n_k}}(0) = \emptyset$ ist, gilt auch:

$$\int\limits_\Omega f g\,dx = 0 \qquad \forall\, g \in C_0(\Omega \setminus \{0\}).$$

Dann liefert Folgerung 1.23 $f = 0$ fast überall in $\Omega \setminus \{0\}$, also $f = 0$ fast überall in Ω. Aber wenn man in (2.19) $g = 1$ setzt, folgt

$$1 = \int\limits_\Omega f_{n_k} \to \int\limits_\Omega f = 0,$$

ein Widerspruch. ■

2.20 Folgerung. $L^\infty(\Omega)$ *ist nicht reflexiv.*

Beweis : Aus Satz 2.13 wissen wir, dass $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))^*$, aber in Kapitel 3.1 Satz 4.6 (iii) haben wir gezeigt, dass X reflexiv ist genau dann, wenn X^* reflexiv ist. ■

• Dualraum von L^∞. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{B}$ Menge der Lebesgue-messbaren Teilmengen von Ω.

2.21 Definition. *Eine Mengenfungtion $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ heißt **additiv**, wenn für beliebige disjunkte Mengen $A, C \in \mathcal{B}$ gilt:*

$$\varphi(A \cup C) = \varphi(A) + \varphi(C).$$

Für $A \in \mathcal{B}$ wird mit

$$V_\varphi(A) := \sup_{C \subseteq A,\, C \in \mathcal{B}} |\varphi(C)| \tag{2.22}$$

*die **Variation** von φ auf A bezeichnet. Man sagt, dass φ von **beschränkter Variation** ist, wenn $V_\varphi(\Omega) < \infty$. φ heißt **absolutstetig** bezüglich des Lebesguemaßes, wenn aus $|B| = 0$ folgt, dass $\varphi(B) = 0$ ist.*

• Sei $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ eine additive Mengenfunktion mit beschränkter Variation, dann sind auch

$$\varphi^+(A) := \frac{1}{2}(|\varphi|(A) + \varphi(A)),$$
$$\varphi^-(A) := \frac{1}{2}(|\varphi|(A) - \varphi(A)),$$

additive Mengenfunktionen mit beschränkter Variation, welche positiv sind, wobei

$$|\varphi|(E) := \sup_{\cup A_i = E,\, A_i \cap A_j = \emptyset} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(A_i)|.$$

$|\varphi|$ heißt **Totalvariation** von φ.
• Es gilt:

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$$

• Im Folgenden sei φ immer additiv, absolutstetig und von beschränkter Variation.
• Sei $u \in L^\infty(\Omega)$. Sei $\ell_0 < \ell_1 < \ldots < \ell_{N+1}$ eine Zerlegung des Bildbereiches von u, d.h.

$$-\|u\|_\infty > \ell_0, \; \|u\|_\infty < \ell_{N+1}.$$

Man nennt $\max\limits_{i=0,\ldots,N} |\ell_{i+1} - \ell_i| =: F(\ell)$ die **Feinheit** der Zerlegung. Wir definieren

$$A_{\ell+1} := \{x \in \Omega \,\big|\, \ell_i \le u(x) < \ell_{i+1}\} \in \mathcal{B} \qquad i = 0, \ldots, N. \tag{2.23}$$

Für $\alpha_i \in [\ell_i, \ell_{i+1}]$ beliebig betrachte

$$s_\ell = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \chi_{A_{i+1}}.$$

Es gilt

$$\|u - \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \chi_{A_{i+1}}\|_\infty \leq \max_i |\ell_{i+1} - \ell_i| = F(\ell), \tag{2.24}$$

d.h. u wird gut durch die Treppenfunktion approximiert.

2.25 Lemma. *In obiger Situation existiert der Grenzwert*

$$\lim_{F(\ell)\to 0} \sum \alpha_i \varphi(A_{i+1}). \tag{2.26}$$

BEWEIS : Wie oben kann man $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ zerlegen, es reicht also $\varphi \geq 0$ zu betrachten. Nach (2.24) gibt es eine Folge (s_ℓ) von Treppenfunktionen, so dass

$$s_\ell \to u \ \text{ in } L^\infty(\Omega) \qquad \text{für } F(\ell) \to 0.$$

Sei $s_\ell = \sum_i \alpha_i^\ell \chi_{A_{i+1}^\ell}$. Analog zur Analysis III Vorlesung folgt dann

$$\begin{aligned} |\sum_i \alpha_i^n \varphi(A_{i+1}^\ell) - \sum_j \alpha_j^k \varphi(A_{j+1}^k)| &= |\sum_{i,j} (\alpha_i^\ell - \alpha_j^k) \varphi(A_{j+1}^k \cap A_{i+1}^\ell)| \\ &\leq \sum_{i,j} |\alpha_i^\ell - \alpha_j^k| \, |\varphi(A_{j+1}^k \cap A_{i+1}^\ell)| \\ &\leq \|s_\ell - s_k\|_\infty \sum_{i,j} \varphi(A_{j+1}^k \cap A_{i+1}^\ell) \\ &\leq \|s_\ell - s_k\|_\infty \varphi(\Omega). \end{aligned}$$

also ist $\sum \alpha_i^\ell \varphi(A_{i+1}^\ell)$ eine Cauchyfolge und somit existiert der Grenzwert. ∎

• Man sieht leicht, dass der Grenzwert von der Zerlegung und der Wahl der α_i unabhängig ist.

2.27 Definition. *Für $u \in L^\infty(\Omega)$ ist das* ***Radon-Integral*** *bezüglich der Mengenfunktion φ*

$$\int_\Omega u \, d\varphi$$

definiert als der Grenzwert in (2.26).

• Man kann das Radonintegral auch für allgemeinere Funktionen definieren.

2.28 Lemma. *Die Menge der additiven, absolutstetigen Mengenfunktionen mit beschränkter Variation bilden einen normierten Vektorraum bezüglich der Norm*

$$\|\varphi\|_{BV} := \sup_{\|u\|_\infty \leq 1} |\int_\Omega u \, d\varphi|.$$

Beweis : Seien φ_1 und φ_2 additiv und von beschränkter Variation. Dann gilt

$$|(\varphi_1+\varphi_2)(A)| \le |\varphi_1(A)| + |\varphi_2(A)|,$$

$\varphi_1+\varphi_2$ ist also von beschränkter Variation. Weiter haben wir

$$(\varphi_1+\varphi_2)(A\cup C) = \varphi_1(A\cup C)+\varphi_2(A\cup C) = (\varphi_1+\varphi_2)(A)+(\varphi_1+\varphi_2)(C),$$

$\varphi_1+\varphi_2$ ist also auch additiv. Die Absolutstetigkeit ist klar, ebenso die Eigenschaften für $\lambda\varphi$, womit die Vektorraumeigenschaft gezeigt ist.

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega u\,d(\varphi_1+\varphi_2) &= \lim_{F(\ell)\to 0}\sum_i \alpha_i^\ell(\varphi_1+\varphi_2)(A_{i+1}^\ell)\\ &= \lim_{F(\ell)\to 0}\Big(\sum_i \alpha_i^\ell\varphi_1(A_{i+1}^\ell)+\sum_i^\ell \varphi_2(A_{i+1}^\ell)\Big)\\ &= \int\limits_\Omega u\,d\varphi_1 + \int\limits_\Omega u\,d\varphi_2.\end{aligned}$$

Wenn man nun auf beiden Seiten $\sup\limits_{\|u\|_\infty}$ bildet, folgt die Dreiecksungleichung. Wenn $\|\varphi\|_{BV}=0$ ist, folgt für alle $A\in\mathcal{B}$ $\varphi(A)=\int\chi_A d\varphi = 0$ und somit $\varphi = 0$. ∎

2.29 Beispiel.

Sei $g\in L^1(\Omega)$ betrachte

$$\varphi(A) := \int\limits_A g\,dx = \int\limits_\Omega g\chi_A dx,$$

dann ist $\varphi:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ ist additiv, denn wenn $A\cap C=\emptyset$ ist, ist $\chi_{A\cap C}=\chi_A+\chi_C$. φ ist absolutstetig, denn wenn $|A|=0$, d.h. $\chi_A=0$, dann ist auch $\varphi(A)=0$. Außerdem ist φ von beschränkter Variation, denn $V_\varphi(\Omega) = \sup\limits_{A\in\mathcal{B}}|\int\limits_A g\,dx| \le \sup\limits_A \int\limits_\Omega |g|dx \le \|g\|_1$, d.h. $L^1(\Omega)\subseteq BV$.

Sei $u \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\,d\varphi &= \lim_{F(\ell)\to 0} \sum_i \alpha_i^\ell \varphi(A_{i+1}^\ell)\\ &= \lim_{F(\ell)\to 0} \sum \alpha_i^\ell \int_{A_{i+1}} g\,dx\\ &= \lim_{F(\ell)\to 0} \int_\Omega \sum_i \alpha_i^\ell \chi_{A_{i+1}^\ell} g\,dx\\ &\overset{(2.24)}{=} \int_\Omega ug\,dx.\end{aligned}$$

2.30 Satz. *Sei $f \in (L^\infty(\Omega))^*$. Dann existiert genau eine additive, absolutstetige Mengenfunktion φ mit beschränkter Variation so, dass*

$$\langle f, u\rangle = \int_\Omega u\,d\varphi \qquad \forall\, u \in L^\infty(\Omega). \tag{2.31}$$

Weiterhin gilt

$$\|f\|_{(L^\infty(\Omega))^*} = \|\varphi\|_{BV}. \tag{2.32}$$

Umgekehrt definiert jede solche Mengenfunktion durch (2.31) ein stetiges, lineares Funktional auf $L^\infty(\Omega)$.

Beweis : Sei $f \in (L^\infty(\Omega))^*$ und $\varphi(A) := \langle f, \chi_A\rangle$. $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ ist additiv, denn falls $A \cap C = \emptyset$ ist, dann ist $\chi_{A\cup C} = \chi_A + \chi_C$. Außerdem ist φ von beschränkter Variation, denn

$$|\varphi(A)| = |\langle f, \chi_A\rangle| \le \|f\|_{(L^\infty)^*}\|\chi_A\|_\infty \le \|f\|_{(L^\infty)^*}.$$

Wenn $|A| = 0$ ist, ist $\chi_A = 0$ und somit $\varphi(A) = 0$, φ ist daher absolutstetig. Für $u \in L^\infty(\Omega)$ betrachte eine Zerlegung des Bildbereichs der Feinheit $\frac{1}{n}$. Wie in (2.23) erhalten wir Mengen A_i^n, $i = 0, \dots, N(n)$. Setze

$$u_n := \sum_{i=0}^N \alpha_i^n \chi_{A_{i+1}^n}.$$

Mit (2.24) ergibt sich $u_n \to u$ in $L^\infty(\Omega)$, also auch

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle.$$

Außerdem konvergiert auch

$$\langle f, \sum \alpha_i^n \chi_{A_{i+1}^n} \rangle = \sum_i \alpha_i^n \varphi(A_{i+1}^n) \overset{\text{Lemma 2.25}}{\longrightarrow} \int_\Omega u \, d\varphi.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts ist dann

$$\int_\Omega u \, d\varphi = \langle f, u \rangle \qquad \forall\, u \in L^\infty(\Omega).$$

(2.32) ergibt sich dann, indem man auf beiden Seiten das $\sup\limits_{\|u\|_\infty \le 1}$ bildet. Die Eindeutigkeit zeigt man wie üblich, die Rückrichtung ist klar.

■

• Beispiel 2.29 impliziert $L^1(\Omega) \subseteq (L^\infty(\Omega))^*$. Nicht alle $f \in (L^\infty(\Omega))^*$ sind durch L^1-Funktionen generiert. Sei $0 \in \Omega$ und sei

$$f_0 : C_0(\Omega) \to \mathbb{R} : \ u \mapsto u(0), \ 0 \in \Omega$$

Dann ist $f_0 \in (C_0(\Omega))^*$, $C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$, nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung $f \in (L^\infty(\Omega))^* : \ f|_{C_0} = f_0$ und $\|f\|_{(L^\infty)^*} \le 1$.
Sei $g \in L^1(\Omega)$ mit

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega ug \, dx \qquad \forall\, u \in L^\infty(\Omega).$$

Für $u \in C_0(\Omega \setminus \{0\}) \subseteq C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega ug \, dx = \langle f, u \rangle = u(0) = 0.$$

Mit Folgerung 1.23 ist dann $g = 0$ fast überall in $\Omega \setminus \{0\}$, also auch fast überall in Ω. Sei $u_0 \in C_0(\Omega) : \ u_0(0) \neq 0$, $u_0(0) = \langle f, u_0 \rangle = 0$, ein Widerspruch.

2.33 Satz. *Sei $1 \le p < \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ separabel.*

Beweis : Sei I eine abzählbare Indexmenge und $(W_i)_{i \in I}$ die Familie der Würfel

$$W_i = \prod_{k=1}^n (a_k^i, b_k^i) \qquad a_k^i, \, b_k^i \in \mathbb{Q}$$

mit $W_i \subseteq \Omega$. Sei E der Vektorraum über $\mathbb{Q}$ generiert durch die charakteristischen Funktionen χ_{W_i}, d.h.

$$E := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\big|\, \exists\, \alpha_i \in \mathbb{Q}, \, i = 1, \ldots, k \ f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{W_i} \}.$$

Wir werden zeigen, dass E dicht in $L^p(\Omega)$ ist. Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$. Wegen Satz 1.21 gibt es ein $f_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|f - f_1\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $\Omega' \subseteq\subseteq \Omega$ mit $\operatorname{supp} f_1 \subseteq \Omega'$, dann ist $\sup\limits_{\overline{\Omega'}} |\nabla f_1| \leq K$. Wir überdecken Ω' mit paarweise disjunkten Würfeln mit Diameter δ, wobei

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{4K|\Omega'|^{\frac{1}{p}}}, \operatorname{dist}(\delta\Omega, \overline{\Omega'})\right).$$

Für alle x, $y \in W$ gilt:

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq |\nabla f_1(\eta)||x - y| \leq K\frac{\varepsilon}{4K|\Omega'|^{\frac{1}{p}}} = \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}}.$$

Wähle $y_0 \in W$ fest, somit gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass $|f_1(y_0) - q| < \frac{\varepsilon}{4|\Omega'|^{\frac{1}{p}}}$. Setze $f_2|_W := q$, dann ist $f_2 \in E$. Für alle $x \in W$ ist dann:

$$\begin{aligned}
|f_1(x) - f_2(x)| &= |f_1(x) - q| \\
&\leq |f_1(x) - f_2(y_0)| + |f_1(y_0) - q| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}} + \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}}
\end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned}
\|f_1 - f_2\|_{L^p(\Omega)}^p &= \sum_W \int\limits_W |f_1 - f_2|^p dx \\
&\leq \sum_W \int\limits_W \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \frac{1}{|\Omega'|} dx \\
&= \sum_W |W| \frac{1}{|\Omega'|}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\|f - f_2\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - f_1\|_{L^p(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^p(\Omega')} \leq \varepsilon.$$

■

2.34 Lemma. *Sei X ein Banachraum. Falls es eine Familie von Teilmengen $(U_i)_{i \in I}$ gibt mit*

(i) *Für alle $i \in I$ ist U_i offen und nichtleer,*

(ii) *U_i sind paarweise disjunkt, d.h. $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j$,*

(iii) *I ist nicht abzählbar,*

dann ist X nicht separabel.

Beweis : Wir nehmen an, dass X separabel ist, sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dicht in X. Für alle $i \in I$ ist

$$U_i \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset.$$

Sei $n(i)$ der Index mit $x_{n(i)} \in U_i$. Die Abbildung $i \mapsto n(i)$ ist injektiv, denn falls $n(i) = n(j)$ ist, ist $u_{n(i)} \in U_i \cap U_j$, d.h. $i = j$. Dann ist aber I abzählbar, ein Widerspruch. ∎

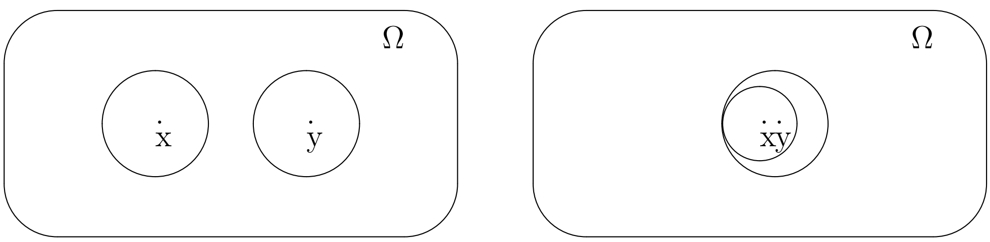
2.35 Folgerung. $L^\infty(\Omega)$ *ist nicht separabel.*

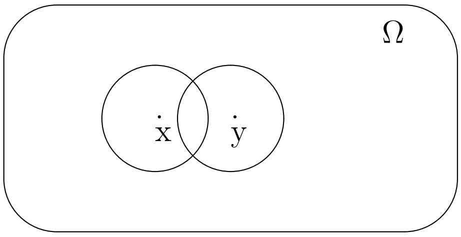
Beweis : Da Ω offen ist, gibt es zu $x \in \Omega$ ein $r(x) > 0$, so dass $B_{r(x)} \subseteq \Omega$. Setze $u_x := \chi_{B_{r(x)}}(x)$ und definiere

$$U_x := \{f \in L^\infty(\Omega) \mid \|f - u_x\|_\infty < \frac{1}{2}\}.$$

Die U_x sind offen in $L^\infty(\Omega)$ und nichtleer, $x \in \Omega$ ist eine nicht abzählbare Indexmenge. Um die Behauptung von Lemma 2.34 anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass die U_x paarweise disjunkt sind. Sei also $x \neq y$ und $f \in U_x \cap U_y$, d.h.

$$\|u_x - u_y\|_\infty \leq \|u_x - f\|_\infty + \|f - u_y\|_\infty < 1.$$





Dann ist entweder $B_{r(x)}(x) \setminus B_{r(y)}(y) \neq \emptyset$, diese Menge hat Maß > 0 oder es ist $B_{r(y)}(y) \setminus B_{r(x)}(x) \neq 0$ und auch diese Menge hat Maß > 0, also folgt

$$\|u_x - u_y\| = 1,$$

ein Widerspruch, also folgt mit Lemma 2.34, dass L^∞ nicht separabel ist. ■

• Eigenschaften von $L^p(\Omega)$:

- $1 < p < \infty$: separabel, reflexiv $(L^p)^* \cong L^{p'}$
- $p = 1$: separabel $(L^1)^* = L^\infty$, nicht reflexiv
- $p = \infty$: nicht separabel, nicht reflexiv $(L^\infty)^* \supsetneqq L^1$
- Bezüglich Kompaktheit ist $p = \infty$ ok, denn in Kapitel 3.1 Satz 3.10

  $$B_{L^\infty} = \{f \in L^\infty \,\big|\, \|f\|_\infty \leq 1\}$$

  ist kompakt bezüglich der $*$-schwachen Topologie $\tau(L^\infty, L^1)$, da $(L^1)^* = L^\infty$. Wegen Kapitel 3.1 Folgerung 4.14 und Satz 2.32 gibt es für jede beschränkte Folge (f_n) in L^∞ eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ mit

  $$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \qquad \text{in } L^\infty.$$

- $1 < p < \infty$ Da L^p reflexiv ist, ist nach Kapitel 3.1 Satz 4.2

  $$B_{L^p} = \{f \in L^p \,\big|\, \|f\|_p \leq 1\}$$

  kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(L^p, L^{p'})$. Wenn (f_n) eine beschränkte Folge in L^p ist, gibt es nach Kapitel 3.1 Satz 4.15 eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ mit

  $$f_{n_k} \rightharpoonup f \qquad \text{in } L^p$$

• Es fehlt also noch die Kompaktheit bezüglich der starken Topologie.

2.36 Satz (Kolmogorov). *Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Die Menge $K \subseteq L^p(\Omega)$ ist relativ kompakt genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *K ist beschränkt, d.h. es gibt ein $c > 0$, so dass für alle $f \in K$ gilt:*

$$\|f\|_p \leq c.$$

(ii) *K ist **gleichgradig p-stetig**, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $f \in K$ und alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| \leq \delta$ gilt:*

$$\int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \varepsilon^p. \tag{2.37}$$

• Damit das Integral in (2.37) wohldefiniert ist, setzen wir f außerhalb von Ω durch 0 fort, d.h.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \neq \Omega \end{cases}$$

$\tilde{f}$ ist dann in $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. Im Folgenden lassen wir die Welle weg, d.h. auch die Fortsetzung $\tilde{f}$ wird mit f bezeichnet.

Beweis : "$\Rightarrow$" Sei $K \subseteq L^p(\Omega)$ relativ kompakt, dann ist $\overline{K}$ kompakt. Nach Kapitel 0 Satz 2.4 ist dann $\overline{K}$ auch präkompakt, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $f_i \in K$, $i = 1, \dots, N$ mit

$$\|f_i - f\|_p \leq \varepsilon \qquad \forall\, f \in K,$$

K ist also beschränkt durch $\max_i \|f_i\|_p + 1$ und somit ist (i) erfüllt. Sei $f \in L^p(\Omega)$ (bzw. $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$), dann ist nach Lemma 1.24

$$\lim_{h \to 0} \|f(\cdot + h) - f\|_p = 0,$$

d.h. es gibt $\delta_i > 0$, so dass für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta_i$:

$$\int_\Omega |f_i(x+h) - f_i(x)|^p dx \leq \varepsilon^p.$$

Setze $\delta := \min\limits_{i=1,\ldots,n} \delta_i$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$ und für alle $f \in K$:

$$\begin{aligned}\|f(\cdot + h) - f\|_p &\leq \|f(\cdot + h) - f_i(\cdot + h)\|_p + \|f_i(\cdot + h) - f_i\|_p + \|f_i - f\|_p \\ &\leq 3\varepsilon,\end{aligned}$$

also (2.37).
"$\Leftarrow$" In einem metrischen Raum sind relative Kompaktheit und relative Folgenkompaktheit äquivalent, es reicht also zu zeigen, dass es für alle Folgen (f_n) aus K eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ gibt, so dass

$$f_{n_k} \to f \text{ in } L^p(\Omega).$$

Wir wollen den Satz von Arzela-Ascoli benutzen. Sei also (f_n) eine Folge in K, dann gilt für alle $0 < \gamma < \delta$:

$$J_\gamma * f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

wobei J_γ der Glättungsoperator ist. Es gilt

$$\|f_n - J_\gamma * f_n\|_p < \varepsilon. \tag{2.38}$$

In der Tat (vgl. Ana III Satz 11.4) ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}|J_\gamma * f_n(x) - f_n(x)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_n(x-y) - f_n(x)| J_\gamma(y) dy \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} J_\gamma(y)dy\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int\limits_{B_\gamma(0)} |f_n(x-y) - f_n(x)|^p J_\gamma(y)dy\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Wenn man nun beide Seiten mit p potenziert und das Integral über $\mathbb{R}^n$ bildet, ergibt sich, da $\int\limits_{\mathbb{R}^n} J_\gamma(y)dy = 1$ ist:

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |J_\gamma * f_n(x) - f_n(x)|^p dx &\leq \int\limits_\Omega \int\limits_{B_\gamma(0)} |f_n(x-y) - f_n(x)| J_\gamma(y) dy dx \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{B_\gamma(0)} J_\gamma(y) \int\limits_\Omega |f_n(x-y) - f_n(x)|^p dx dy \\ &\leq \varepsilon^p.\end{aligned}$$

Sei nun $0 < \gamma < \delta$ fest, aber beliebig. Die Folge $(J_\gamma * f_n) \subseteq C(\overline{\Omega})$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli:

$$\begin{aligned}
|J_\gamma * f_n(x)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_n(x-y)| J_\gamma(y) dy \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_n(x-y)|^p J_\gamma(y) dy \\
&\leq c(\gamma) \int\limits_{\Omega} |f_n|^p dy \\
&\leq c(\gamma) c.
\end{aligned}$$

Die Folge $(J_\gamma * f_n)$ ist also in $C(\overline{\Omega})$ beschränkt. Außerdem ist sie gleichgradig stetig, denn:

$$|J_\gamma * f_n(x) - J_\gamma * f_n(z)| = |\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_n(x-y) J_\gamma(y) dy - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_n(z-y) J_\gamma(y) dy|$$

Substitution $\tilde{y} = x - y$, $\tilde{y} = z - y$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{\Omega \cap (B_\gamma(0) \cap B_\gamma(z))} f_n(\tilde{y}) (J_\gamma(\tilde{y} - x) - J_\gamma(\tilde{y} - z)) d\tilde{y} \\
&\leq \int\limits_{\Omega} |f_n(\tilde{y})| \|\nabla J_\gamma\|_{\overline{C(\Omega)}} |x - z| d\tilde{y} \\
&\leq \|\nabla J_\gamma\|_{C(\overline{\Omega})} |x - z| |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \|f_n\|_p \\
&\leq c|x - z|.
\end{aligned}$$

Nun folgt mit dem Satz von Arzela-Ascoli, dass es eine Teilfolge $(J_\gamma * f_{n_k})$ gibt, die gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt, dass (f_{n_k}) eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ ist, denn:

$$\begin{aligned}
\|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p &\leq \|f_{n_k} - J_\gamma * f_{n_k}\|_p + \|J_\gamma * f_{n_k} - J_\gamma * f_{n_l}\|_p + \|J_\gamma * f_{n_l} - f_{n_l}\|_p \\
&\overset{(2.38)}{\leq} 2\varepsilon + \Big(\int\limits_{\Omega} |J_\gamma * f_{n_k} - J_\gamma * f_{n_l}|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, liegt der Grenzwert f der Folge (f_{n_k}) in $L^p(\Omega)$. ■

• Wenn Ω unbeschränkt ist, ist eine Menge $K \subseteq L^p(\Omega)$ genau dann relativ kompakt, wenn zusätzlich zu (i) und (ii) aus Satz 2.36 noch gilt:

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $G \subseteq\subseteq \Omega$, so dass

$$\int_{\Omega \setminus G} |f|^p dx \leq \varepsilon^p \qquad \forall\, f \in K.$$