Kapitel 5

Hilberträume

5.1 Der Hilbertraum

1.1 Definition. *Ein* ***Prä-Hilbertraum*** H *ist ein Vektorraum über* $\mathbb{R}$*, in dem ein* ***Skalarprodukt*** $(.,.)$ *gegeben ist, d.h. eine Abbildung von* $H \times H$ *nach* $\mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften*

(i) *Bilinearität*

$$\begin{aligned}(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha(u,w) + \beta(v,w)\,,\\ (u, \alpha z + \beta w) &= \alpha(u,z) + \beta(u,w)\,,\end{aligned}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *und alle* $u, v, w, z \in H$.

(ii) $(.,.)$ *ist symmetrisch, d.h.*

$$(u,v) = (v,u) \qquad \text{für alle } u, v \in H\,.$$

(iii) $(.,.)$ *ist positiv definit, d.h.*

$$(u,u) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in H,$$

und $(u,u) = 0$ *genau für* $u = 0$.

• Wir benutzen die Bezeichnung $\|u\| := \sqrt{(u,u)}$ und werden zeigen, dass $\|.\|$ alle Eigenschaften einer Norm hat.

Wir notieren einige Standardfolgerungen aus den Eigenschaften des Skalarproduktes. Es gilt:

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,(a,b) + \|b\|^2, \tag{1.2}$$

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2\,. \tag{1.3}$$

1.4 Lemma (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *Sei H ein Prä-Hilbertraum. Dann gilt für alle $u, v \in H$*

$$|(u,v)| \leq \|u\| \, \|v\| \,.$$

BEWEIS : Es gilt

$$0 \leq \big(\alpha u - \tfrac{1}{\alpha} v,\ \alpha u - \tfrac{1}{\alpha} v\big) = |\alpha|^2 \, \|u\|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2} \|v\|^2 - 2 \, (\alpha u, \frac{1}{\alpha} v) \,,$$

und somit

$$2 \, (u,v) \leq |\alpha|^2 \, \|u\|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2} \|v\|^2 \,.$$

Mit $\alpha = (\|v\|/\|u\|)^{\frac{1}{2}}$, $\|u\| \neq 0$, folgt

$$(u,v) \leq \|u\| \, \|v\| \,.$$

Übergang von u zu $-u$ ergibt die behauptete Ungleichung, für $u \neq 0$. Falls $u = 0$ ist, ergibt sich aus obiger Rechnung $(0, v) = 0$ für alle $v \in H$. ■

1.5 Lemma. *Sei H ein Prä-Hilbertraum mit Skalarprodukt $(.,.)$. Dann gilt:*

(i) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$, *(Homogenität)*,

(ii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, *(Dreiecksungleichung)*.

BEWEIS :

(i) $\|\alpha u\|^2 = (\alpha u, \alpha u) = |\alpha|^2 \, \|u\|^2$

(ii)
$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &\leq \|u\|^2 + 2 \, |(u,v)| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2 \, \|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \,. \end{aligned}$$

■

Lemma 1.5 und Definition 1.1 rechtfertigen folgende Definition.

1.6 Definition. $\|u\| := \sqrt{(u,u)}$ *ist die durch das Skalarprodukt in H* ***induzierte Norm****.*

1.7 Definition. *Ein* ***Hilbertraum*** *ist ein Prä-Hilbertraum, der bezüglich der induzierten Norm vollständig ist.*

- Jeder Hilbertraum ist ein Banachraum.

Beispiele:

a) $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt $(.,.)$ ist ein Hilbertraum.

b) $C[a,b]$ mit dem Skalarprodukt

$$(f,g) = \int_a^b f g \, dx$$

ist ein Prä-Hilbertraum, aber kein Hilbertraum wie das folgende Beispiel zeigt.
Sei $[a,b] = [-1,1]$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ -1 & x \in [-1, -\frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Dann gilt punktweise $f_n \to f$, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1], \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x \in [-1, 0). \end{cases}$$

Aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt $f_n \to f$ in $L^2(-1,1)$. Also ist f_n eine Cauchyfolge deren Limes keine stetige Funktion ist.

c) $L^2(\Omega)$, Ω offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, ist ein Hilbertraum. Das Skalarprodukt ist erklärt durch

$$(f,g)_{L^2} := (f,g) = \int_\Omega f \, g \, dx \, .$$

Es induziert die übliche L^2-Norm. Der L^2 ist vollständig (Kapitel 4, Satz 1.8).

1.8 Satz. *Ein Hilbertraum ist gleichmäßig konvex und somit reflexiv.*

Beweis : Seien $u, v \in H$ mit $\|u\|, \|v\| \leq 1$ und $\|u - v\| > \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|^2 &\overset{1.3}{=} 2\Big\|\frac{u}{2}\Big\| + 2\Big\|\frac{v}{2}\Big\| - \Big\|\frac{u-v}{2}\Big\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4}, \end{aligned}$$

H ist also gleichmäßig konvex und mit Kapitel 3.1, Satz 4.22 folgt dann sofort, dass H reflexiv ist. ∎

1.9 Satz. *Es sei $M \subseteq H$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge. Dann gibt es für alle $u \in H$ ein eindeutiges Element $v =: P_M u \in M$ mit*

$$\|u - P_M u\| = \inf_{w \in M} \|u - w\|. \tag{1.10}$$

Man nennt $v = P_M u$ die Projektion von u auf M. Sie ist charakterisiert durch die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} P_M u \in M, \\ (u - P_M u, w - P_M u) \le 0 \qquad \forall\, w \in M. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Beweis : (i) Existenz:
Die Funktion $\varphi(w) := \|u - w\|$ ist konvex, denn

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda w_1 + (1-\lambda) w_2) &= \|(\lambda + (1-\lambda))u - \lambda w_1 - (1-\lambda) w_2\| \\ &\le \lambda \|u - w_1\| + (1-\lambda)\|u - w_2\| \\ &= \lambda \varphi(w_1) + (1-\lambda)\varphi(w_2). \end{aligned}$$

φ ist stetig, denn $w_n \to w \Leftrightarrow \|w_n - w\| \to 0$.

$$\big|\, \|w_n - u\| - \|w - u\| \,\big| \le \|w_n - u - (w - u)\| \to 0$$

$\lim\limits_{\|w\| \to \infty} \varphi(w) = \infty$, falls M unbeschränkt ist, da $\|u - w\| \ge \|w\| - \|u\| \to \infty$, nach Kapitel 3.1 Lemma 4.16 gibt es also ein Minimum von φ auf M.
(ii) (1.10) $\Rightarrow$ (1.11)
$P_M u \in M$ ist klar. Wenn $w \in M$ ist, ist auch die Konvexkombination $(1-\lambda) P_M u + \lambda w \in M$ und es gilt

$$\begin{aligned} \|u - P_M u\| &\le \|u - (1-\lambda) P_M u - \lambda w\| \\ &= \|u - P_M u + \lambda (P_M u - w)\| \end{aligned}$$

Quadrieren liefert:

$$\|u - P_M u\|^2 \le \|u - P_M u\|^2 + 2\lambda (u - P_M u, P_M u - w) + \lambda^2 \|P_M u - w\|^2,$$

und somit

$$2(u - P_M u, w - P_M u) \le \lambda \|P_M u - w\|^2.$$

Wenn wir nun λ gegen Null gehen lassen, folgt (1.11):

$$(u - P_M u, w - P_M u) \le 0.$$

(iii) (1.11) $\Rightarrow$ (1.10)
(1.10) folgt sofort, denn

$$\begin{aligned}\|u-P_Mu\|^2-\|w-u\|^2 &= \|u\|^2-2(u,P_Mu)+\|P_Mu\|^2-\|w\|^2+2(w,u)-\|u\|^2\\ &= 2(u-P_Mu,w-P_Mu)-\|P_Mu-w\|^2\\ &\overset{(1.11)}{\leq} 0.\end{aligned}$$

(iv) Eindeutigkeit
Seien $v_1, v_2 \in M$, so dass sie (1.11) erfüllen, d.h. $v_1 = P_Mu$, $v_2 = \widetilde{P_Mu}$ und

$$(u-v_1, w-v_1) \leq 0 \qquad \forall\, w \in M,$$

$$(u-v_2, w-v_2) \leq 0 \qquad \forall\, w \in M.$$

Wenn man nun in der ersten Ungleichung $w = v_2$ und in der zweiten Ungleichung $w = v_1$ wählt und dann die beiden Ungleichungen addiert, folgt

$$(u-v_1, v_2-v_1)+(u-v_2, v_1-v_2) = (v_1-u+u-v_2, v_1-v_2) = \|v_1-v_2\|^2 \leq 0,$$

d.h. $v_1 = v_2$. ■

1.12 Satz. *Unter den Voraussetzung von Satz 1.9 ist die Projektion Lipschitzstetig mit Konstante* 1*, d.h. für alle* $u, v \in H$ *gilt*

$$\|P_Mu - P_Mv\| \leq \|u-v\|.$$

Beweis : In (1.11) haben wir gezeigt, dass für alle $w \in M$ gilt:

$$(u-P_Mu, w-P_Mu) \leq 0 \qquad \text{wähle}\, w = P_Mv$$

$$(u-P_Mv, w-P_Mv) \leq 0 \qquad \text{wähle}\, w = P_Mu$$

$$\Rightarrow (u-P_Mu, P_Mv-P_Mu)+(v-P_Mv, P_Mu-P_Mv) \leq 0$$

$$\Rightarrow (u-P_Mu-v+P_Mv, P_Mv-P_Mu) \leq 0$$

$$\Rightarrow \|P_Mv-P_Mu\| \leq (v-u, P_Mv-P_Mu) \leq \|v-u\|\|P_Mv-P_Mu\|.$$

■

1.13 Satz. *Sei* V *ein abgeschlossener, linearer Unterraum von* H*. Für alle* $u \in H$ *ist die Projektion* P_Vu *charakterisiert durch*

$$\begin{aligned} P_Vu &\in V \\ (u-P_Vu, v) &= 0 \qquad \forall\, v \in V \end{aligned} \tag{1.14}$$

Beweis : Nach (1.11) ist $(u - P_V u, w - P_V u) \leq 0 \forall w \in V$. Da V ein Unterraum ist, ist auch $\lambda w \in V$, demnach ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(u - P_V u, \lambda w - P_V u) \leq 0$$
$$\lambda(u - P_V u, w) \leq (u - P_V u, P_V u)$$

Für den Fall, dass $\lambda > 0$ ist, multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{1}{\lambda}$ und lassen $\lambda \to \infty$ gehen. Dann erhält man:

$$(u - P_V u, w) \leq 0.$$

Falls $\lambda < 0$ ist, multiplizierren wir auch mit $\frac{1}{\lambda}$ und lassen $\lambda \to -\infty$ gehen, dann erhält man:

$$(u - P_V u, w) \geq 0,$$

also (1.14). Umgekehrt gelte (1.14). Da $w - P_V u \in V$ ist, ist

$$(u - P_V u, w - P_V u) \leq 0.$$

■

1.15 Definition. *Sei V ein linearer Unterraum von H. Dann ist das **Orthogonalkomplement** von V definiert durch*

$$V^\perp = \{u \in H \,\big|\, (u, v) = 0 \forall v \in V\}.$$

• Später werden wir zeigen, dass Definition 1.15 und Definition 3.1 aus Kapitel 2 konsistent sind.

1.16 Satz (Projektionssatz). *Sei V ein abgeschlossener, linearer Unterraum von H. Dann existiert für alle $u \in H$ eine eindeutige Zerlegung*

$$u = v + w \qquad v \in V,\, w \in V^\perp.$$

Man schreibt: $H = V \oplus V^\perp$.

Beweis : (i) Existenz
Nach Satz 1.13 gibt es für alle $u \in H$ ein eindeutiges $P_V u \in V$ mit

$$(u - P_V u, v) = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Dann ist $u - P_V u \in V^\perp$, d.h. $u = (u - P_V u) + P_V u \in V^\perp + V$.

(ii) Eindeutigkeit
Sei $u = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$ mit $v_i \in V_i$, $w_i \in V_i^\perp$, d.h. $v_1 - v_2 = w_1 - w_2$ und wenn man auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit $v_1 - v_2$ bildet folgt

$$\|v_1 - v_2\|^2 = (w_2 - w_1, v_1 - v_2) = 0,$$

d.h. $v_1 = v_2$ und $w_1 = w_2$. ∎

• Die Abgeschlossenheit ist eine wichtige Voraussetzung, denn betrachte $H = L^2(a,b)$, $V = C_0^\infty(a,b)$. Sei $u \in L^2(a,b) \setminus C_0^\infty(a,b)$. Dann ist $u = v + w$, $v \in V$, $w \in V^\perp$. Dann ist

$$\int_a^b w\varphi\, dx = (w, \varphi) = 0 \qquad \forall\, \varphi \in V = C_0^\infty(a,b),$$

aber daraus folgt, dass $w = 0$ ist und somit $u = v$, ein Widerspruch.

5.2 Dualraum und Lemma von Lax-Milgram

2.1 Satz (Riesz). *Sei H ein Hilbertraum. Zu jedem $F \in H^*$ gibt es eindeutig bestimmtes Element $f \in H$ mit*

$$\langle F, u \rangle = (f, u) \qquad \forall\, u \in H. \tag{2.2}$$

Für dieses Element gilt:

$$\|F\|_{H^*} = \|f\|_H\,.$$

Beweis : Sei $N = \{\, x \in H \,\big|\, \langle F, x \rangle = 0 \,\}$ der Kern von F. N ist abgeschlossener, linearer Teilraum von H. Ist nämlich $u_m \in N$, $u_m \to u$, so folgt $0 = \langle F, u_m \rangle \to \langle F, u \rangle$, d.h. $u \in N$. O.B.d.A. dürfen wir $N \neq H$ annehmen. (Andernfalls ist $f = 0$.) Es gibt daher ein $w_0 \in H$, das nicht in N ist. Nach dem Projektionssatz ist

$$w_0 = v + w \quad \text{ mit } v \in N, w \in N^\perp, w \neq 0.$$

Wir beachten, dass $\langle F, w \rangle \neq 0$, da $w \notin N$, und $F\big\langle u - \frac{\langle F,u \rangle}{\langle F,w \rangle} w \big\rangle = 0$, also $u - \frac{\langle F,u \rangle}{\langle F,w \rangle} w \in N$. Da $w \in N^\perp$, folgt

$$\big(w, u - \tfrac{\langle F,u \rangle}{\langle F,w \rangle} w\big) = 0$$

und

$$\big(w, u\big) = \tfrac{\langle F,u \rangle}{\langle F,w \rangle} \|w\|^2,$$

somit

$$\langle F, u\rangle = \tfrac{\langle F,w\rangle}{\|w\|^2}(w,u) = \Big(\frac{\langle F, w\rangle}{\|w\|^2}w, u\Big).$$

Damit ist das darstellende Element $f := \frac{\langle F,w\rangle}{\|w\|^2} w$ konstruiert. Aus (2.2) und der Definition der Norm im Dualraum folgt sofort

$$\|F\|_{H^*} = \sup_{\|u\|\le 1} |\langle F, u\rangle| = \sup |(f,u)| \le \sup_{\|u\|\le 1} \|f\|\|u\| = \|f\|_H.$$

Wenn man in (2.2) $u = \frac{f}{\|f\|}$ wählt erhält auch

$$(u, f) = \|f\| = \langle F, u\rangle \le \|F\|_{H^*}\Big\|\frac{f}{\|f\|}\Big\| = \|F\|_{H^*}.$$

■

• Man sagt daher: H lässt sich mit H^* identifizieren und schreibt $H \cong H^*$, und oft auch unpräziserweise $H = H^*$.

2.3 Definition. *Eine* ***beschränkte Bilinearform*** *ist eine Abbildung* $a(.,.)\colon H \times H \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften*

(i) $a(u, v)$ *ist linear in* u *und* v.

(ii) *Es existiert eine Konstante* K *mit*

$$|a(u, v)| \le K\|u\|\,\|v\| \qquad \text{für alle } u, v \in H.$$

2.4 Definition. *Eine Bilinearform heisst* ***koerziv****, wenn eine Konstante* $c_0 > 0$ *existiert mit*

$$a(u, u) \ge c_0\|u\|^2$$

für alle $u \in H$.

• Man beachte, dass wir keine Symmetrie für $a(u, v)$ vorausgesetzt haben.

2.5 Satz. *Sei* $a(.,.)$ *eine beschränkte, koerzive Bilinearform und sei* K *eine konvexe, abgeschlossene, nichtleere Teilmenge von* H. *Dann existiert für alle* $F \in H^*$ *ein eindeutiges Element* $u \in K$, *so dass für alle* $v \in K$ *gilt:*

$$a(u, v - u) \ge \langle F, u\rangle. \tag{2.6}$$

Falls $a(.,.)$ *symmetrisch ist, ist* u *durch die Eigenschaften*

$$\begin{gathered} u \in K \\ \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u\rangle = \min_{v\in K} a(v, v) - F(v) \end{gathered} \tag{2.7}$$

charakterisiert.

Beweis : Sei $u \in H$ fest, aber beliebig. Die Abbildung

$$v \mapsto a(u,v)$$

ist linear und beschränkt, also ein Element von H^*. Nach Satz 2.1 gibt es also ein eindeutiges $Au \in H$ mit

$$a(u,v) = (Au, v) \qquad \forall\, v \in H.$$

Die Abbildung $A : H \to H : \ u \mapsto Au$ ist also :
- linear, da

$$(A(u+w), v) = a(u+w, v) = a(u,v) + a(w,v) = (Au, v) + (Aw, v)$$

- beschränkt, da

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = a(u, Au) \le K\|u\|\|Au\|,$$

durch Kürzen ergibt sich

$$\|Au\| \le K\|u\|. \tag{2.8}$$

- koerziv, da

$$(Au, u) = a(u,u) \ge c_0\|u\|^2. \tag{2.9}$$

Somit ist Gleichung (2.6) äquivalent zu dem Problem: Finde ein $u \in K$, so dass

$$(Au, v-u) \le (f, v-u) \qquad \forall\, v \in K. \tag{2.10}$$

Sei $\rho > 0$, dann ist Gleichung (2.10) äquivalent zu $0 \ge (\rho f - \rho Au + u - u, v - u)\,\forall\, v \in K$. Dies ist äquivalent zu (vgl. (1.11))

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u) \tag{2.11}$$

Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Die Abbildung

$$S : K \to K : \ w \mapsto P_K(\rho f - \rho Aw + w)$$

ist eine Kontraktion, d.h.

$$\|Sw_1 - Sw_2\| \le K\|w_1 - w_2\| \qquad 0 \le K < 1,$$

denn

$$\begin{aligned}
\|Sw_1 - Sw_2\| &= \|P_K(\rho f - \rho Aw_1 + w_1) - P_K(\rho f - \rho Aw_2 + w_2)\| \\
&\overset{\text{Satz } 1.12}{\le} \|\rho f - \rho Aw_1 + w_1 - (\rho f - \rho Aw_2 + w_2)\| \\
&\le \|w_1 - w_2 - \rho A(w_1 - w_2)\| \\
\|Sw_1 - Sw_2\|^2 &\le \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho(w_1 - w_2, A(w_1 - w_2)) + \rho^2\|A(w_1 - w_2)\|^2 \\
&\overset{(2.8)\,(2.9)}{\le} \|w_1 - w_2\|^2(1 - 2\rho c_0 + \rho^2 k^2)
\end{aligned}$$

Wähle $0 < \rho < \frac{2c_0}{k^2}$, dann ergibt sich

$$1 - 2\rho c_0 + \rho^2 k^2 =: K < 1.$$

S ist also eine Kontraktion, mit Satz 3.2 aus Ana II gibt es dann einen eindeutigen Fixpunkt $u \in K$, d.h.

$$P_K(\rho f - \rho A u + u) = Su = u$$

Dies ist (2.11) $\Leftrightarrow$ (2.10) $\Leftrightarrow$ (2.6), es gibt also eine eindeutige Lösung von (2.6).
Sei $a(.,.)$ symmetrisch, dann ist $(H, a(.,.))$ ein Hilbertraum. Die Norm $\|u\|_a := \sqrt{a(u,u)}$ ist äquivalent zu $\|.\|$, denn

$$c_0\|u\|^2 \leq a(u,u) \leq K\|u\|^2.$$

Nach Satz 2.1 gibt es dann ein eindeutiges $g \in H$, so dass

$$\langle F, v\rangle = a(g,v) =: (g,v)_a \qquad \forall\, v \in H.$$

(2.6) ist also äquivalent zu

$$0 \geq a(g-v, v-u) \qquad \forall\, v \in K, \tag{2.12}$$

und dies ist mit (2.11) äquivalent zu $u = P_K^\alpha u$ und dies ist wiederum mit Satz 1.9 äquivalent zu: Finde ein $u \in K$, so dass

$$\|g-u\|_a = \min_{v\in K} \|g-v\|_a,$$

d.h. man minimiert auf K: $a(g-v, g-v) = a(g,g) - 2a(v,g) + a(v,v)$, d.h. man minimiert auf K:

$$a(v,v) - 2a(g,v).$$

Dies ist äquivalent dazu, dass man auf K

$$\frac{1}{2}a(v,v) - \langle F, v\rangle$$

minimiert, das ist gerade (2.7). ∎

2.13 Folgerung (Lemma von Lax-Milgram). *Sei $a(.,.)$ eine beschränkte, koerzive Bilinearform auf H. Dann existiert für alle $F \in H^*$ ein eindeutiges Element $u \in H$ mit*

$$a(u,v) = \langle F, v\rangle \qquad \forall\, v \in H. \tag{2.14}$$

Falls $a(.,.)$ zusätzlich symmetrisch ist, ist dieses $u \in H$ durch

$$\begin{aligned} & u \in H \\ & \frac{1}{2}a(u,u) - \langle F, u\rangle = \min_{v\in H} \frac{1}{2}a(v,v) - \langle F, v\rangle \end{aligned} \tag{2.15}$$

charakterisiert.

Beweis : Analog zum Beweis von Folgerung 1.13 zeigt man, dass (2.6) äquivalent ist zu

$$a(u,v) = \langle F, v\rangle \qquad \forall\, v \in H$$

für einen abgeschlossenen, linearen Unterraum H. Die Aussage 1 aus Satz 2.5 liefert die Aussage 1 hier und der 2. Teil von Satz 2.5 liefert den 2. Teil hier. ∎

Beispiel: Wir betrachten das gleiche Problem wie in Kapitel 2:

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u(x)) = f \qquad & \text{in } \Omega, \\ u = 0 \qquad & \text{auf } \partial\,\Omega, \end{aligned} \tag{2.16}$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand ist und $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ derart, dass es ein $c_0 > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \Omega$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \tag{2.17}$$

d.h. das Problem (2.16) ist elliptisch. Die Norm auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist

$$\|u\|_{W_0^{1,2}} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2},$$

sie ist äquivalent zur Norm $\|\nabla u\|_{L^2}$. Wir definieren auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ die Bilinearform

$$a(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_j u(x)\partial_i v(x)\, dx. \tag{2.18}$$

- $a(.,.)$ ist koerziv, denn

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\partial_j u \partial_i u\, dx \\ &\overset{(2.17)}{\geq} \int_\Omega c_0|\nabla u|^2 dx \\ &\geq c_0 c\|u\|^2_{W_0^{1,2}} \end{aligned}$$

- $a(.,.)$ ist beschränkt, denn

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |\int\limits_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\partial_j u \partial_i v \, dx| \\
&\leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_\infty \int\limits_\Omega |\partial_j u||\partial_i v| dx \\
&\leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_\infty \|\partial_j u\|_2 \|\partial_i v\|_2 \\
&\leq (\max_{i,j} \|a_{ij}\|_\infty) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \\
&\leq c\|u\|_{W_0^{1,2}} \|v\|_{W_0^{1,2}}.
\end{aligned}
$$

Zu $f \in L^2(\Omega)$ definiere $F \in (W_0^{1,2})^*$ durch

$$\langle F, v\rangle = \int\limits_\Omega fv \, dx.$$

F ist beschränkt, denn:

$$|\langle F, v\rangle \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_{W_0^{1,2}}.$$

Nach dem Satz von Lax-Milgram gibt es für alle $f \in L^2(\Omega)$ ein eindeutiges $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$a(u,v) = \langle F, v\rangle \qquad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_j u(x)\partial_i v(x) dx = \int\limits_\Omega fv \, dx \qquad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.19}$$

Das ist die **schwache Formulierung** von (2.16). u heißt **schwache Lösung** von (2.16). Falls zusätzlich $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ ist, gilt

$$a(u,v) = -\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}\partial_j u) v \, dx = \int\limits_\Omega fv \, dx \qquad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega) \supseteq C_0^\infty(\Omega)$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ergibt sich

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^d \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u(x)) &= f \qquad \text{f.ü. in}\,\Omega \\
u &= 0 \qquad \text{f.ü. auf}\,\partial\Omega
\end{aligned}
$$

5.3 Orthogonalsysteme

3.1 Definition. *Ein* ***Orthogonalsystem*** *ist eine Menge* $\{\,\varphi_j \in H \,\big|\, j \in \mathbb{N}\,, \varphi_j \neq 0\,\}$ *mit*

$$(\varphi_k, \varphi_j) = 0 \quad \forall j \neq k\,.$$

Das Orthogonalsystem heißt ***Orthonormalsystem****, wenn zusätzlich* $\|\varphi_j\| = 1, j \in \mathbb{N}$*. Ein Orthogonalsystem heißt* ***vollständig*** *in* H*, wenn der Vektorraum, der durch* $\{\,\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\,\}$ *generiert wird, dicht in* H *ist.*

• Wir bezeichnen mit $\mathrm{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$ die Menge der endlichen Linearkombinationen von beliebigen Elementen aus dem System, d.h.

$$\mathrm{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\} := \{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j \,\big|\, \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n\}\,.$$

3.2 Lemma. *Es sei* $M = \{\, v_j \in H \,\big|\, j \in \mathbb{N}\,\}$*. Dann gibt es ein Orthonormalsystem* $\{\,\varphi_j \in H,\, j \in \mathbb{N} \,\big|\, \varphi_j \neq 0\,\}$ *mit* $\mathrm{span}\, M = \mathrm{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$.

Beweis : Man führt einen Orthogonalisierungsprozess durch. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass für jedes N die Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_N$ linear unabhängig sind. Setze

$$\varphi_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Sei φ_j schon konstruiert. Man setze

$$\tilde{\varphi}_{j+1} = v_{j+1} - \sum_{l=1}^{j} (v_{j+1}, \varphi_l)\, \varphi_l\,,$$
$$\varphi_{j+1} = \frac{\tilde{\varphi}_{j+1}}{\|\tilde{\varphi}_{j+1}\|}\,.$$

Offensichtlich ist φ_{j+1} orthogonal zu φ_l, $1 \leq l \leq j$. Damit sind die φ_j durch vollständige Induktion definiert. Durch die Konstruktion erreicht man

$$\mathrm{span}\{\,\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\,\} = \mathrm{span}\{M\}\,.$$

■

3.3 Satz. *Jeder separable Hilbertraum* H *besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem.*

Beweis : Aus der Definition 3.1 und Lemma 3.2 folgt offensichtlich die Behauptung, denn da H separabel ist, gibt es ein System $\{v_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$, so dass $\overline{\operatorname{span}\{v_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}}^H = H$. ∎

3.4 Lemma. *Sei $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Dann ist für jedes $w \in H$, $N \in \mathbb{N}$*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} (w, \varphi_j)\, \varphi_j \Big\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2 \le \|w\|^2 .$$

Somit gilt auch $\sum_{j=1}^{\infty} |(w, \varphi_j)|^2 \le \|w\|^2 < \infty$.
Beweis : Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\le \Big\| w - \sum_{j=1}^{N} (w, \varphi_j)\, \varphi_j \Big\|^2 \\ &= \|w\|^2 + \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2 - 2 \sum_{j=1}^{N} \big(w, (w, \varphi_j)\, \varphi_j\big) \\ &= \|w\|^2 + \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2 - 2 \sum_{j=1}^{N} (w, \varphi_j)\, (w, \varphi_j) \\ &= \|w\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2 . \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Aussage des Lemmas. ∎

3.5 Satz. *Sei $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Dann lässt sich jedes Element $u \in H$ als konvergente,* ***verallgemeinerte Fourierreihe***

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j)\, \varphi_j \tag{3.6}$$

darstellen und es gilt

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u, \varphi_j)|^2 . \tag{3.7}$$

Beweis : Nach Definition 3.1 gibt es zu $u \in H$ eine Folge $u^N = \sum_{j=1}^{N} \mu_j^N \varphi_j \to u \in H$. Es ist $\mu_j^N = (u^N, \varphi_j)$, wie man sich durch Multiplikation im Sinne des Skalarproduktes mit φ_j überlegt. Es gilt wegen Lemma

3.4

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} (u,\varphi_j)\,\varphi_j - u^N \Big\|^2 = \Big\| \sum_{j=1}^{N} (u-u^N,\varphi_j)\,\varphi_j \Big\|^2 \le \big\| u-u^N \big\|^2 .$$

Da $u^N \to u$, folgt somit

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} (u,\varphi_j)\,\varphi_j - u \Big\|^2 \to 0 \quad (N\to\infty)\,, \tag{3.8}$$

was (3.6) beweist. Aus (3.8) folgt

$$\sum_{j=1}^{N} |(u,\varphi_j)|^2 - 2\sum_{j=1}^{N} (u,\varphi_j)\,(\varphi_j,u) + \|u\|^2 \to 0\,,$$

d.h.

$$\|u\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |(u,\varphi_j)|^2 \to 0 \qquad (N\to\infty)\,.$$

Damit ist (3.7) bewiesen. ∎

Man kann sich überlegen, dass die Vollständigkeit eines Orthonormalsystems äquivalent zu Relation (3.7) ist.

3.9 Lemma. *Sei $\{\varphi_j\}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Wenn für alle $u \in H$ gilt:*

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u,\varphi_j)|^2\ ,$$

dann ist $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis : Sei $u \in H$. Im Beweis von Lemma 3.4 haben wir gezeigt:

$$\Big\| u - \sum_{j=1}^{n} (u,\varphi_j)\varphi_j \Big\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(u,\varphi_j)|^2\ .$$

Nach Voraussetzung konvergiert die rechte Seite gegen Null, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (u,\varphi_j)\varphi_j = u$$

und somit ist $\operatorname{span}\{\varphi_j \,\big|\, j\in\mathbb{N}\}$ dicht in H. ∎

• Sei $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$

$$H_n := \operatorname{span}\{\varphi_j \,\big|\, j = 1, \dots, n\}\,.$$

Somit ist H_n ein abgeschlossener linearer Unterraum von H. Nach Satz 1.9 existiert somit eine Projektion von H auf H_n, die wir mit P_n bezeichnen wollen. Es gilt:

3.10 Lemma. *Die Projektion $P_n \colon H \to H_n$ ist gegeben durch*

$$P_n(u) = \sum_{j=1}^{n} (u, \varphi_j)\varphi_j\,.$$

Insbesondere ist also die n-te Partialsumme der verallgemeinerten Fourierreihe Lösung des Minimierungsproblems $\inf\limits_{v \in H_n} \|u - v\|$.

Beweis : Nach Folgerung 1.13 ist P_n charakterisiert durch

$$\begin{aligned} P_n u &\in H_n \\ (P_n u - u, v) &= 0 \qquad \forall\, v \in H_n \end{aligned}$$

Wähle $v = \varphi_j$, dann ergibt sich $(P_n u, \varphi_j) = (u, \varphi_j)$. Wähle $P_n u := \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$, dann ergibt sich $(P_n u, \varphi_k) = \alpha_k$ und somit

$$P_n u = \sum_{i=1}^{n} (u, \varphi_i)\varphi_i.$$

■

Beispiel: $L^2(0, 2\pi)$, dann bilden die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem.