Kapitel 6

Kompakte Operatoren und Spektraltheorie

6.1 Kompakte Operatoren

• In diesem Abschnitt seien X und Y immer Banachräume, falls nichts anderes gesagt wird.

1.1 Definition. *Ein Operator $A : X \to Y$ heißt kompakt, wenn er stetig ist und beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet.*

• A muss nicht notwendig linear sein.
• Wenn der Operator $A : X \to Y$ linear, beschränkt und kompakt ist, sagt man

$$A \in K(X, Y) \subseteq L(X, Y)$$

• Falls $X = Y$ ist, benutzen wir die Abkürzung $K(X) = K(X, X)$.

1.2 Satz. *Die Menge $K(X, Y)$ ist ein abgeschlossener, linearer Unterraum von $L(X, Y)$.*

Beweis : Es ist klar, dass $K(X, Y)$ ein linearer Unterraum von $L(X, Y)$ ist. Sei $(A_n) \subseteq K(X, Y)$, $A_n \to A$ in $L(X, Y)$. Zu zeigen ist, dass $A \in K(X, Y)$ ist. Da A linear ist, reicht es zu zeigen, dass $A(B_1(0))$ relativ kompakt ist und da Y vollständig ist, reicht es nach Kapitel 0 Satz 2.4 sogar zu zeigen, dass $A(B_1(0))$ präkompakt ist. Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein n_0, so dass

$$\|A_{n_0} - A\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da A_{n_0} kompakt ist, ist $A_{n_0}(B_1(0))$ präkompakt, es gibt also Punkte y_i, $i = 1, \ldots, n_\varepsilon$, so dass

$$A_{n_0}(B_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i).$$

Dann ist auch
$$A(B_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i),$$
denn sei $x \in B_1(0)$, d.h. $\|A_{n_0}x - Ax\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt also ein $i \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$: $\|A_{n_0}x - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $x \in B_1(0)$ gibt es also ein i, so dass
$$\|Ax - y_i\| < \varepsilon.$$
■

Beispiel: (i) Die Einbettung
$$E : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega) : \, f \mapsto f$$
ist kompakt (Satz von Rellich), denn $E(B_1(0))$ ist präkompakt.
(ii) Sei Ω beschränkt und $K \in L(\Omega \times \Omega)$. Der Operator $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert durch
$$(Au)(x) = \int\limits_\Omega K(x,y)u(x)dx$$
ist kompakt.

1.3 Definition. *Wir sagen, dass $A \in L(X,Y)$ **endlichen Rang** hat, wenn $\dim R(A) < \infty$.*

1.4 Lemma. *Wenn $A \in L(X,Y)$ endlichen Rang hat, dann ist A kompakt.*

Beweis : Da A beschränkt ist, ist
$$A(B_1(0)) \subseteq B_R(0) \subseteq Y.$$
Außerdem ist $A(B_1(0)) \subseteq R(A)$, und $R(A)$ ist endlichdimensional. $A(B_1(0))$ liegt also in einer beschränkten Menge eines endlichdimensionalen Raumes, d.h. $A(B_1(0))$ ist relativ kompakt. ■

1.5 Lemma. *Sei $(A_n) \subseteq L(X,Y)$ eine Folge von Operatoren mit endlichem Rang, die in $L(X,Y)$ gegen A konvergiert. Dann ist A kompakt.*

Beweis : Da die A_n von endlichem Rang sind, sind sie nach Lemma 1.4 kompakt. Dann ist nach Satz 1.2 auch ihr Grenzwert kompakt. ■

• Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

1.6 Lemma. *Sei H ein Hilbertraum und $A \in K(X,H)$ ein kompakter Operator. Dann existieren Operatoren $A_n \in L(X,H)$ mit endlichem Rang, so dass $A_n \to A$ in $L(X,H)$.*

Beweis : Die Menge $K := \overline{A(\overline{B_1(0)})}$ ist kompakt. Nach Kapitel 0 Satz 2.4 gibt es für alle $\varepsilon > 0$ Elemente $y_i \in H$, $i = 1, \ldots, n_\varepsilon$, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(y_i).$$

Setze $H_\varepsilon := \operatorname{span}\{y_i \,\big|\, i = 1, \ldots, n_\varepsilon\}$. Sei $P_\varepsilon : H \to H_\varepsilon$ die Projektion aus Kapitel 5. Es gilt: $\|I - P_\varepsilon\| \leq 1$, denn für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ ist

$$\begin{aligned} \|x - P_\varepsilon x\|^2 &= (x - P_\varepsilon x, x - P_\varepsilon x) \\ &= (x - P_\varepsilon x, x) \\ &= \|x - P_\varepsilon x\| \|x\| \\ &\leq \|x - P_\varepsilon x\|. \end{aligned}$$

Definiere

$$A_\varepsilon := P_\varepsilon \circ A : \ X \to H_\varepsilon.$$

A_ε hat endlichen Rang. Sei $x \in \overline{B_1(0)}$, dann gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n_\varepsilon\}$: $\|Ax - y_i\| < \varepsilon$. Da $P_\varepsilon y_i = y_i$ für $y_i \in H_\varepsilon$ ist dann

$$\begin{aligned} \|Ax - A_\varepsilon x\| &= \|Ax - P_\varepsilon \circ Ax\| \\ &= \|(I - P_\varepsilon)Ax\| \\ &= \|(I - P_\varepsilon)(Ax - y_i)\| \\ &\leq \|I - P_\varepsilon\| \|Ax - y_i\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Wenn man nun das $\sup\limits_{x \in \overline{B_1(0)}}$ bildet, folgt

$$\|A - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

■

1.7 Lemma. *Seien X, Y und Z Banachräume und seien $A \in L(X, Y)$, $B \in K(Y, Z)$ (bzw. $A \in K(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$). Dann ist $B \circ A \in K(X, Z)$.*

Beweis : (i) Da $A \in L(X, Y)$ ist, ist $A(B_1(0)) \subseteq B_R(0)$ und da $B \in K(Y, Z)$ liegt folgt, dass $B \circ A(B_1(0))$ relativ kompakt ist.
(ii) Da $A \in K(X, Y)$ liegt, ist $\overline{A(B_1(0))}$ kompakt, also auch folgenkompakt. Da B stetig ist, ist das Bild einer konvergenten Folge wieder konvergent, d.h. $B \circ A(B_1(0))$ ist also relativ folgenkompakt und somit ist der Operator $B \circ A$ kompakt. ■

1.8 Satz (Schauder). *$A \in L(X,Y)$ ist genau dann kompakt, wenn der adjungierte Operator $A^* \in L(Y^*, X^*)$ kompakt ist.*

Beweis : "$\Rightarrow$" Wir müssen zeigen, dass $(A^*(B_{Y^*})) \subset X^*$ relativ kompakt ist. Für jede Folge $(y_n^*) \subseteq B_{Y^*}$ müssen wir zeigen, dass es eine Teilfolge $(y_{n_k}^*) \subseteq (y_n^*)$ gibt, so dass $(A^* y_{n_k}^*)$ in X^* konvergiert. Die Menge

$$K := \overline{A(B_X)}$$

ist kompakt in Y, K ist also ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist die Folge (y_n^*) aufgefasst als eine Folge in $C(K)$ gleichmäßig beschränkt, denn für $y \in K$ gilt

$$|\langle y_n^*, y\rangle| \leq \|y_n^*\|\|y\| \leq \|y\| \leq c,$$

da $y_n^* \in B_{Y^*}$ und K beschränkt ist. Wenn man auf beiden Seiten das $\sup\limits_{y\in K}$ bildet, ist (y_n^*) beschränkt auf $C(K)$. Außerdem ist (y_n^*) gleichgradig stetig, denn für $y_1, y_2 \in K$ folgt

$$|\langle y_n^*, y_1 - y_2\rangle| \leq \|y_n^*\|\|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_2\|.$$

Somit ist (y_n^*) Lipschitzstetig, also insbesondere stetig mit Konstante $\varepsilon = \delta$, die unabhängig von n ist. Die Folge (y_n^*) ist also gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es daher eine Teilfolge $(y_{n_k}^*) \subseteq (y_n^*)$, die in $C(K)$ konvergiert und deshalb eine Cauchyfolge ist. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n_l, n_k \geq n_0$ gilt:

$$\sup_{y\in K} |\langle y_{n_k}^*, y\rangle - \langle y_{n_l}^*, y\rangle| \leq \varepsilon.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
\|A^* y_{n_k}^* - A^* y_{n_l}^*\|_{X^*} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle A^* y_{n_k}^* - A^* y_{n_l}^*, x\rangle_{X^*,X} \\
&= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle y_{n_k}^* - y_{n_l}^*, Ax\rangle_{Y^*,Y} \\
&= \sup_{y\in K} \langle y_{n_k}^* - y_{n_l}^*, y\rangle_{Y^*,Y} \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

d.h. die Folge $(A^* y_{n_k}^*)$ ist eine Cauchyfolge in X^*, hat also einen Grenzwert und somit ist A^* kompakt.
"$\Leftarrow$" Sei $A^* \in L(Y^*, X^*)$ kompakt. Aus dem gerade eben gezeigten folgt dann, dass $A^{**} \in K(X^{**}, Y^{**})$ ist. Nach Lemma 1.7 ist auch die Verknüpfung

$A^{**} \circ J_X$ kompakt, wobei $J_X : X \to X^*$ die kanonische Isometrie ist. Außerdem gilt:
$$A^{**} \circ J_X = J_Y \circ A, \tag{1.9}$$
denn für alle $y^* \in Y^*$ und für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \langle A^{**} J_X x, y^* \rangle_{Y^{**},Y^*} &\overset{\text{Def } A^{**}}{=} \langle J_X x, A^* y^* \rangle_{X^{**},X^*} \\ &\overset{\text{Def } J_X}{=} \langle A^* y^*, x \rangle_{X^*,X} \\ &\overset{\text{Def } A^*}{=} \langle y^*, Ax \rangle_{Y^*,Y} \\ &\overset{\text{Def } J_Y}{=} \langle J_Y Ax, y^* \rangle_{Y^{**},Y^*}. \end{aligned}$$

Aus (1.9) und der Tatsache, dass $A^{**} \circ J_X$ kompakt ist folgt, dass auch

$$J_Y \circ A$$

kompakt ist. Sei (x_n) eine beschränkte Folge aus X. Da $J_Y \circ A$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$, so dass die Folge

$$(J_Y A x_{n_k}) \subseteq (J_Y A x_n)$$

konvergiert. Sie ist also eine Cauchyfolge und da J_Y eine Isometrie ist, gilt

$$\|J_Y A x_{n_k} - J_Y A x_{n_l}\| = \|A x_{n_k} - A x_{n_l}\|.$$

$(A x_{n_k})$ ist daher auch eine Cauchyfolge und somit ist A kompakt. ∎

6.2 Fredholmsche Alternative

2.1 Lemma (Riesz). *Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subsetneq X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $u \in X$ mit $\|u\| = 1$ und*
$$\operatorname{dist}(u, M) \geq 1 - \varepsilon.$$

Beweis : Sei $v \in X \setminus M$. Da M abgeschlossen ist, gilt

$$d := \operatorname{dist}(v, M) > 0.$$

Es gibt also ein $m_0 \in M$, das den Abstand von v und M gut approximiert, d.h.
$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Setze $u := \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|}$, dann hat u Norm 1 und für $m \in M$ ist

$$\begin{aligned}\|u-m\| &= \left\| \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|} - m \right\| \\ &= \frac{1}{\|v-m_0\|} \big\| v - m_0 - m\|v-m_0\| \big\| \\ &\geq \frac{d}{\|v-m_0\|} \\ &\geq 1-\varepsilon.\end{aligned}$$

■

2.2 Lemma. *Sei X ein normierter Vektorraum, sei $M \subsetneq X$ ein endlichdimensionaler, linearer Unterraum. Dann gibt es ein $u \in X$ mit $\|u\| = 1$ und*

$$\operatorname{dist}(u, M) = 1.$$

Beweis : Sei $v \in X \setminus M$, dann ist $d := \operatorname{dist}(v, M) > 0$ und es gibt eine approximierende Folge $(m_n) \subseteq M$ mit

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1-\frac{1}{n}}.$$

Daraus folgt

$$\|m_n\| \leq \|m_n - v\| + \|v\| \leq \frac{d}{1-\frac{1}{n}} + \|v\| < K.$$

(m_n) ist also eine beschränkte Folge und da M endlichdimensional ist, gibt es eine Teilfolge $(m_{n_k}) \subseteq (m_n)$, so dass

$$m_{n_k} \to m_0 \qquad \text{in } M$$

und es gilt

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \lim_{k\to\infty} \|v - m_{n_k}\| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{d}{1-\frac{1}{n_k}} = d.$$

■

2.3 Satz (Riesz). *Sei X ein normierter Vektorraum, so dass*

$$B_X = \{x \in X \,\big|\, \|x\| \leq 1\}$$

kompakt ist. Dann ist X endlichdimensional.

Beweis : Sei $\dim X = \infty$, dann gibt es eine Folge von linearen Unterräumen

$$X_{n-1} \subseteq X_n,\ \dim X_n < \infty.$$

Nach Lemma 2.1 gibt es also eine Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $x_n \in X_n$, außerdem

$$\operatorname{dist}(x_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

Für alle $n > m$ ist dann $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$, da x_n und x_m in unterschiedlichen Räumen liegen. Es gibt somit keine konvergente Teilfolge der Folge $(x_n) \subseteq B_X$, ein Widerspruch da B_X kompakt ist. ■

- Die Umkehrung gilt auch:

$$\dim X < \infty \Rightarrow B_X \text{ ist kompakt.}$$

2.4 Lemma. *Sei $Y \subseteq X$ ein endlichdimensionaler Unterraum. Dann existiert eine stetige, lineare Projektion P von X auf Y, d.h. $P \circ P = P$. Ferner gilt:*

$$X = Y \oplus N(P),$$

d.h. für alle $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ und $z \in N(P)$ mit $x = y + z$ und $\|y\| \leq c\|x\|$, $\|z\| \leq c\|x\|$.

Beweis : Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von Y, d.h. für alle $y \in Y$ existiert eine eindeutige Darstellung

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Definiere $\varphi_i : Y \to \mathbb{R} : y \mapsto \alpha_i$. Die φ_i sind lineare, stetige Funktionale auf Y, nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es dann eine Abbildung $\tilde{\varphi}_i \in X^*$ mit $\tilde{\varphi}_i|_Y = \varphi_i$. Definiere

$$P : X \to Y : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(x) e_i.$$

P ist linear und stetig, da es eine endliche Summe von linearen und stetigen

Funktionalen ist. Außerdem ist P eine Projektion, denn

$$\begin{aligned}
P(Px) &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(Px)e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i\Big(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(x)e_j\Big)e_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j(x)\tilde{\varphi}_i(e_j)e_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j(x)\delta_{ij}e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_j(x)e_j \\
&= Px.
\end{aligned}$$

Jedes $x \in X$ lässt sich schreiben als

$$x = x - Px + Px,$$

wobei $x - Px \in N(P)$ ist, denn $P(x - Px) = Px - PPx = Px - Px = 0$.
Da $Px \in Y$ ist, ist die Existenz der Zerlegung bewiesen.
Nun zur Eindeutigkeit:
Sei $x = x_1 + z_1 = x_2 + z_2$, $y_i \in Y$, $z_i \in N(P)$, dann folgt

$$Y \ni y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in N(P).$$

Aber $N(P) \cap Y = \{0\}$, denn sei $x \in N(P) \cap Y$, dann ist

$$0 = Px = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(x)e_i \overset{x \in G}{=} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i.$$

Da die (e_i) eine Basis von Y sind und somit linear unabhängig sind ist dann

$$\varphi_i(x) = 0 \qquad \forall\, i$$

und somit $x = 0$, d.h. $y_1 = y_2$ und $z_1 = z_2$, die Zerlegung ist also eindeutig.
Nun müssen wir noch die Abschätzungen beweisen. Sei $x = y + z$, $y = Px$, $z = x - Px$, dann ist

$$\|y\| = \|Px\| \leq \|P\|\|x\|,$$

$$\|z\| \leq \|x\| + \|Px\| \leq (1 + \|P\|)\|x\|.$$

■

2.5 Lemma. *Sei* $V \subseteq X^*$ *ein endlichdimensionaler linearer Unterraum. Dann existiert eine stetige, lineare Projektion* $P : X \to V^\perp \subseteq X$. *Ferner gilt:*

$$X = V^\perp \oplus N(P),$$

wobei $\dim V = \dim N(P)$.

Beweis : Sei $f_1, \ldots, f_n$ Basis von $V \subseteq X^*$, dann gibt es $e_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$ mit

$$\langle f_i, e_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{2.6}$$

In der Tat, definiere

$$\Phi : X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (\langle f_1, x\rangle, \ldots, \langle f_n, x\rangle).$$

Φ ist surjektiv, denn sei dem nicht so, dann gibt es ein $y \in \mathbb{R}^n \setminus R(\Phi)$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es dann ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$, das die kompakte Menge $\{y\}$ und den abgeschlossenen Unterraum $R(\Phi)$ trennt, d.h.

$$(z, y) \leq \alpha \leq (z, \Phi(x)) \qquad \forall\, x \in X.$$

Aber da $R(\Phi)$ ein linearer Unterraum ist, ist auch $\lambda\Phi(x) \in R(\Phi)$, man kann also wie üblich $\lambda \to \pm\infty$ gehen lassen und es ergibt sich

$$0 = (z, \Phi(x)) = \sum_{i=1}^n z_i \langle f_i, x\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n z_i f_i, x \Big\rangle \qquad \forall\, x \in X,$$

also $\sum\limits_{i=1}^n z_i f_i = 0$. Da die f_i eine Basis sind, ist $z_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, ein Widerspruch zu $z \neq 0$, somit ist Φ surjektiv. Die e_i, $i = 1, \ldots, n$ sind linear unabhängig, denn falls $0 = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i e_i$, dann gilt für alle $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} 0 = f_j(0) &= f_j\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f_j(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

Definiere $Y := \operatorname{span}\{e_i \,\big|\, i = 1, \dots, n\}$ mit den e_i aus (2.6) und

$$Q : X \to Y : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, x \rangle e_i.$$

Wie im Beweis von Lemma 2.4 folgt, dass Q eine lineare, stetige Projektion ist und sich der Raum X zerlegen lässt als

$$X = Y \oplus N(Q).$$

Offensichtlich ist $N(Q) = V^{\perp}$, denn sei $x \in N(Q)$, d.h. $Q(x) = 0$, also ist

$$\langle f_i, x \rangle = 0 \qquad \forall\, i,$$

d.h. $x \in V^{\perp}$. Setze $P := I - Q$, $P : X \to V^{\perp}$. Wie im Beweis von Lemma 2.4 zeigt man, dass P eine stetige, lineare Projektion ist. Aber

$$Y = N(P),$$

denn

$$\begin{aligned} x \in N(P) &\Leftrightarrow Px = 0 \\ &\Leftrightarrow x - Qx = 0 \\ &\Leftrightarrow x = Qx \\ &\Leftrightarrow x \in Y, \end{aligned}$$

da $Q|_Y = I$. ∎

2.7 Satz (Fredholmsche Alternative). *Sei X ein Banachraum und $A \in K(X)$. Dann gilt:*

(i) *$N(I - A)$ ist endlichdimensional.*

(ii) *$R(I - A)$ ist abgeschlossen und es gilt*

$$R(I - A) = N(I - A)^{\perp}.$$

(iii) *$N(I - A) = 0 \Leftrightarrow R(I - A) = X$.*

(iv) *$\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*)$.*

• Es geht um die Lösung von

$$x - Ax = f\,. \tag{$\star$}$$

Entweder existiert genau eine Lösung von ($\star$) **oder** die homogene Gleichung $x - Ax = 0$ besitzt d linear unabhängige Lösungen und ($\star$) ist lösbar genau dann, wenn $f \in N(I - A^*)^\perp$.

• vgl. Kapitel 2 Satz 3.16 (iii)

• Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ ist ein $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ injektiv genau dann, wenn A surjetiv ist.

• Falls $\dim X = \infty$ ist, ist dies im Allgemeinen falsch (siehe Beispiele in der Einführung).

Beweis : (i) Sei $X_1 := N(I - A)$.

$$x_1 \in X_1 \Leftrightarrow x_1 - Ax_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = Ax_1,$$

d.h. $x_1 \in R(A)$ und somit

$$B_{X_1} \subseteq A(B_X).$$

Da A kompakt ist, ist auch B_{X_1} kompakt und nach Satz 2.4 ist dann X_1 endlichdimensional.
(ii) $R(I - A)$ ist abgeschlossen:
Gelte $z_n := x_n - Ax_n \to z$ in X. Wir müssen zeigen, dass $z \in R(I - A)$ ist. Definiere

$$d_n := \operatorname{dist}(x_n, N(I - A)).$$

Da $\dim N(I - A) < \infty$ ist, gibt es nach Lemma 2.2 $y_n \in N(I - A)$, die den Abstand annehmen:

$$d_n = \|x_n - y_n\|.$$

Da $y_n \in N(I - A)$ gilt, ist $y_n = Ay_n$ und somit

$$z_n = (x_n - y_n) - A(x_n - y_n) \to z. \tag{2.8}$$

Die Folge $(x_n - y_n)$ ist beschränkt, denn sei dem nicht so, dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k} - y_{n_k}) \subseteq (x_n - y_n)$ mit

$$\|x_{n_k} - y_{n_k}\| \to \infty \qquad (k \to \infty).$$

Setze $w_{n_k} := \frac{x_{n_k} - y_{n_k}}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|}$. Da $z_n \to z$, konvergiert auch

$$\frac{z_{n_k}}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} \to 0.$$

Mit (2.8) folgt dann

$$\frac{z_{n_k}}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} = w_{n_k} - Aw_{n_k} \to 0.$$

Da $\|w_{n_k}\| = 1$ und A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(w_{n_{\tilde{k}}}) \subseteq (w_{n_k})$, so dass $Aw_{n_{\tilde{k}}}$ konvergiert und da $w_{n_{\tilde{k}}} - Aw_{n_{\tilde{k}}} \to 0$, konvergiert auch $w_{n_{\tilde{k}}}$ gegen ein $w \in N(I - A)$. Aber es gilt auch

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(w_{n_k}, N(I-A)) &= \inf_{u \in N(I-A)} \|w_{n_k} - u\| \\
&= \inf_{u \in N(I-A)} \left\| \frac{x_{n_k} - y_{n_k}}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} - u \frac{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} \inf_{u \in N(I-A)} \left\| x_{n_k} - y_{n_k} - u\|x_{n_k} - y_{n_k}\| \right\| \\
&= \frac{\operatorname{dist}(x_{n_k}, N(I-A))}{\|x_{n_k} - y_{n_k}\|} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Wenn nun $k \to \infty$ geht, folgt

$$\operatorname{dist}(w, N(I-A)) = 1,$$

ein Widerspruch zu $w \in N(I - A)$. Somit ist die Folge $(x_n - y_n)$ beschränkt. Da A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge, so dass

$$A(x_{n_k} - y_{n_k}) \to \tilde{w}.$$

Wegen (2.8) konvergiert dann auch

$$x_{n_k} - y_{n_k} \to z - \tilde{w} =: v.$$

Aber da A stetig ist, konvergiert dann auch $A(x_{n_k} - y_{n_k}) \to Av$. Wiederum wegen (2.8) ist dann $v - Av = z$, d.h. $z \in R(I - A)$ und somit ist $R(I - A)$ abgeschlossen. Da dann auch der Graph von $I - A$ abgeschlossen ist, ist wegen Kapitel 2 Satz 3.16 auch $R(I - A)$ abgeschlossen genau dann, wenn

$$R(I - A) = N(I - A)^{\perp}.$$

(iii) "$\Rightarrow$" Wir machen einen Widerspruchsbeweis. Sei $X_1 := R(I - A) \subsetneq X$. Nach (ii) ist $R(I - A)$ abgeschlossen, X_1 ist also ein Banachraum. Wenn $y \in X_1$ ist, gibt es ein $x \in X$ mit:

$$y = x - Ax.$$

Dann ergibt sich

$$Ay = Ax - AAx = (I - A)(Ax) \in X_1,$$

d.h. $(A(X_1)) \subseteq X_1$, $A|_{X_1}$ ist also kompakt. Definiere $X_2 := (I-A)(X_1) \subseteq X_1$, X_2 ist abgeschlossen. Es gilt

$$X_2 \subsetneqq X_1,$$

denn da $X_1 \subsetneqq X$ gibt es ein $x_0 \in X \setminus X_1$. Angenommen $X_1 = X_2$, dann wäre

$$y := x_0 - Ax_0 \in X_2,$$

es gibt also ein $x_1 \in X_1$ mit

$$y = x_1 - Ax_1,$$

da aber $I - A$ injektiv ist, folgt

$$X_1 \not\ni x_0 = x_1 \in X_1,$$

ein Widerspruch. Wir iterieren dies:

$$X_n := (I - A)^n(X)$$

mit $X_n \subsetneqq X_{n-1}$ und die X_n sind abgeschlossene, lineare Teilräume. Nach Lemma 2.1 gibt es $u_n \in X_n$ mit $\|u_n\| = 1$ und

$$\operatorname{dist}(u_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Es gilt:

$$Au_n - Au_m = -(u_n - Au_n) + (u_m - Au_m) + (u_n - u_m).$$

Für $n > m$ ist

$$X_{n+1} \subseteq X_n \subseteq X_{m+1} \subseteq X_m.$$

Für $u_n \in X_n$ ist $(I - A)u_n \in X_{n+1} \subseteq X_{m+1}$, für $u_m \in X_m$ ist $(I - A)u_m \in X_{m+1}$ und $u_n \in X_n \subseteq X_{m+1}$. Somit ist

$$\|Au_n - Au_m\| \geq \frac{1}{2},$$

ein Widerspruch, da A kompakt ist.
"$\Leftarrow$" Sei $X = R(I - A)$. Nach Kapitel 2 Satz 3.15 (ii) ist

$$N(I - A^*) = R(I - A)^\perp = X^\perp = \{0\}.$$

Da aber A^* kompakt ist, folgt mit dem gerade gezeigten, dass

$$R(I - A^*) = X^*$$

ist und nach Kapitel 2 Satz 3.15 (ii) gilt

$$N(I - A) = R(I - A^*)^\perp = (X^*)^\perp = \{0\}.$$

(iv) Sei $d := \dim N(I-A)$ und $d^* := \dim N(I-A^*)$. Wir wollen durch einen Widerspruch zeigen, dass $d^* \leq d$ ist. Sei also $d < d^*$. Wegen (i) ist $d < \infty$. Nach Lemma 2.4 gibt es eine stetige, lineare Projektion

$$P : X \to N(I - A).$$

Wegen (ii) ist $R(I - A) = N(I - A^*)^\perp$ und wegen (i) ist $\dim N(I - A^*) = d^* < \infty$. Nach Lemma 2.5 gibt es einen abgeschlossenen, linearen Unterraum F von X, der Dimension d^* hat und

$$X = F \oplus R(I - A). \tag{2.9}$$

Da nach Voraussetzung $d^* > d$ ist, gibt es eine lineare Abbildung

$$\Lambda : N(I - A) \to F,$$

die injektiv, aber nicht surjektiv ist. Der Operator

$$B := A + \Lambda \circ P$$

ist kompakt, da A und P kompakt sind und Λ linear ist. Sei $x \in N(I - B)$, d.h.

$$0 = x - Bx = x - Ax - \Lambda P x,$$

d.h.

$$F \ni \Lambda P x = x - Ax \in R(I - A).$$

Da aber $F \cap R(I - A) = \{0\}$ ist, folgt $x - Ax = 0$, d.h. $x \in N(I - A)$ und somit auch $Px = x$, da P auf $N(I - A)$ die Identität ist. Da $0 = \Lambda P x = \Lambda x$ ist und Λ injektiv ist, folgt $x = 0$, d.h.

$$N(I - B) = \{0\}$$

und somit

$$R(I - B) = X.$$

Da aber Λ nicht surjektiv ist, gibt es ein $x_0 \in F \setminus R(\Lambda)$ und da $R(I-B) = X$ ist, gibt es ein $x \in X : x - Bx = x_0$, d.h.

$$x_0 = \underbrace{x - Ax}_{\in R(I-A)} - \underbrace{\Lambda P x}_{\in R(\Lambda) \subseteq F},$$

somit

$$F \ni x_0 + \Lambda P x = x - Ax \in R(I-A).$$

Wegen (2.9) folgt wieder, dass dann $x - Ax = 0$ sein muss und auch

$$P(\Lambda) \not\ni x_0 = -\Lambda P x \in R(\Lambda),$$

ein Widerspruch, es folgt $d^* \leq d$. Wenn wir das Resultat auf A^* anwenden, ergibt sich

$$\dim N(I - A^{**}) \leq \dim N(I - A^*) \leq \dim N(I - A). \tag{2.10}$$

Aus (1.8) wissen wir, dass $A^{**} \circ J_X = J_X \circ A$ ist und somit

$$\begin{aligned} J_X \circ (I - A) &= J_X - J_X \circ A \\ &= J_X - A^{**} \circ J_X \\ &= (I - A^{**}) \circ J_X, \end{aligned}$$

wenn also $x \in N(I-A)$ ist, so ist $J_X x \in N(I - A^{**})$, d.h.

$$J_X(N(I-A)) \subseteq N(I - A^{**})$$

und da J_X eine lineare Isometrie ist, ergibt sich

$$\dim N(I-A) \leq \dim N(I - A^{**}),$$

in (2.10) folgt also die Gleichheit, d.h. $d^* = d$. ∎

6.3 Spektraltheorie

3.1 Definition. *Sei $A \in L(X)$. Die **Resolventenmenge** $\rho(A)$ ist durch*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, (A - \lambda I) \text{ ist bijektiv von } X \text{ auf } X\}$$

*definiert. Das **Spektrum** $\sigma(A)$ von A ist die Komplementärmenge von $\rho(A)$, d.h.*

$$\sigma(A) := \mathbb{R} \setminus \rho(A).$$

*Man sagt, dass λ ein **Eigenwert** ist, wenn*

$$N(A - \lambda I) \neq \{0\}$$

*und schreibt $\lambda \in EW(A)$. Man nannt $N(A - \lambda I)$ den **Eigenraum** von λ.*

• Wenn $\lambda \in \rho(A)$ ist, ist wegen Kapitel 2 Satz 2.5 $(A-\lambda_0 I)^{-1} \in L(X)$.

• $EW(A) \subseteq \sigma(A)$

• Wenn $\dim X = \infty$ ist, ist im Allgemeinen $EW(A) \subsetneq \sigma(A)$.

• Es ist möglich, dass $N(A-\lambda I) = \{0\}$ und $R(A-\lambda I) \neq X$ ist, denn betrachte

$$A : \ell^2 \to \ell^2 : (u_n) \mapsto (0, u_1, u_2, \ldots).$$

$0 \in \sigma(A)$ und $0 \notin EW(A)$, denn sonst wäre

$$A(u_n) = 0(u_n) = 0$$

und somit $(u_n) = 0$.

3.2 Satz. *Das Spektrum ist eine kompakte Menge, für die gilt*

$$\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \tag{3.3}$$

Beweis : Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| > \|A\|$. Wir müssen zeigen, dass dann λ in der Resolventenmenge $\rho(A)$ ist, d.h. dass $A - \lambda I$ bijektiv ist. Für alle $f \in X$ gibt es eine eindeutige Lösung $u \in X$ von $Au - \lambda u = f$ genau dann, wenn

$$u = \frac{1}{\lambda}(Au - f).$$

Betrachte

$$T : X \to X : u \mapsto \frac{1}{\lambda}(Au - f).$$

T ist eine Kontraktion, denn

$$\begin{aligned} \|Tu_1 - Tu_2\| &= \frac{1}{|\lambda|}\|Au_1 - f - (Au_2 - f)\| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{|\lambda|}\|A\|}_{=:k<1} \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

Mit dem Banachschen Fixpunktsatz ergibt sich dann, dass T einen eindeutigen Fixpunkt hat und somit

$$\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|].$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\rho(A)$ offen ist. Sei $\lambda_0 \in \rho(A)$ und sei λ nahe genug an λ_0, d.h. $|\lambda - \lambda_0| << 1$. Für $f \in X$ hat die Gleichung

$$Au - \lambda u = f \tag{3.4}$$

eine Lösung genau dann, wenn

$$Au - \lambda_0 u = f + \lambda u - \lambda_0 u$$

und da $\lambda_0 u \in \rho(A)$ ist, muss

$$u = (A - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)u)$$

sein. Betrachte die Abbildung

$$T : X \to X : u \mapsto (A - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)u).$$

T ist eine Kontraktion, denn

$$\begin{aligned} \|Tu_1 - Tu_2\| &= \|(A - \lambda_0 I)^{-1}(\lambda - \lambda_0)(u_1 - u_2)\| \\ &\leq \underbrace{\|(A - \lambda_0)^{-1}\||\lambda - \lambda_0|}_{=:k} \|u_1 - u_1\| \end{aligned}$$

Somit muss man $|\lambda - \lambda_0| << 1$ so wählen, dass $k < 1$ ist. $\rho(A)$ ist also offen und $\sigma(A)$ kompakt. ∎

3.5 Satz. *Sei* $\dim X = \infty$ *und* $A \in K(X)$*. Dann gilt*

(i) $0 \in \sigma(A)$.

(ii) $\sigma(A) \setminus \{0\} = EW(A) \setminus \{0\}$.

(iii) *Einer der folgenden Fälle tritt ein:*

- *entweder* $\sigma(A) = \{0\}$,
- *oder* $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *ist endlich,*
- *oder* $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *ist Nullfolge.*

Beweis : (i) Sei $0 \notin \sigma(A)$, d.h. $0 \in \rho(A)$, also ist $A - 0I = A$ bijektiv und

$$I = A^{-1} \circ A$$

ist nach Lemma 1.7 kompakt. Dann ist B_X kompakt und nach Satz 2.3 folgt, dass X endlichdimensional ist, ein Widerspruch.
(ii) Generell gilt, dass $EW(A) \subseteq \sigma(A)$. Sei $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ und sei λ kein Eigenwert von A, d.h.

$$N(A - \lambda I) = \{0\}.$$

Mit Satz 2.7 (iii) folgt dann

$$R(A - \lambda I) = X,$$

d.h. $\lambda \in \rho(A)$, ein Widerspruch.

• Für (iii) benötigen wir folgendes Lemma

3.6 Lemma. *Sei* $\dim X = \infty$ *und* $A \in K(X)$. *Sei* $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ *eine Folge paarweise verschiedener reeller Zahlen mit*

$$\lambda_n \to \lambda$$

und

$$\lambda_n \in \sigma(A) \setminus \{0\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt:

$$\lambda = 0.$$

• Das Lemma besagt, dass alle Punkte von $\sigma(A) \setminus \{0\}$ **isoliert** sind.

BEWEIS : Sei $\lambda_n \in \sigma(A) \setminus \{0\} \overset{\text{(ii)}}{=} EW(A) \setminus \{0\}$, d.h.

$$N(A - \lambda_n I) \neq \{0\}.$$

Es gibt also $e_n \neq 0$ mit $Ae_n - \lambda_n e_n = 0$. Sei $X_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Wir zeigen

$$X_n \subsetneqq X_{n+1}. \tag{3.7}$$

Es reicht zu zeigen, dass für alle n die Menge $\{e_1, \dots, e_n\}$ linear unabhängig ist. Wir führen einen Induktionsbeweis durch. Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei

$$e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,$$

d.h.

$$Ae_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i,$$

es folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) e_i.$$

Da $\{e_1, \dots, e_n\}$ linear unabhängig sind, ist für alle i:

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0.$$

Da aber die λ_i paarweise verschieden sind, müssen die $\alpha_i = 0$ sein und somit $e_{n+1} = 0$, ein Widerspruch. Weiter gilt:

$$(A - \lambda_n I)(X_n) \subseteq X_{n-1}, \tag{3.8}$$

denn jedes $x \in X_n$ besitzt eine Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,$$

d.h.

$$\begin{aligned}(A-\lambda_n I)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i - \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n) e_i \in X_{n-1}.\end{aligned}$$

Wegen (3.7) und Satz 2.1 gibt es für alle $n \geq 2$ ein $u_n \in X_n$ mit $\|u_n\| = 1$ und

$$\operatorname{dist}(u_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Sei $2 \leq m < n$. Es ist

$$X_{m-1} \subseteq X_m \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n$$

und somit

$$\begin{aligned}\left\|\frac{Au_n}{\lambda_n} - \frac{Au_m}{\lambda_m}\right\| &= \Big\| \underbrace{\frac{Au_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n}}_{\in X_{n-1},\,\text{wegen (3.8)}} - \underbrace{\frac{Au_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m}}_{\in X_{m-1} \subseteq X_{n-1}} + u_n - \underbrace{u_m}_{\in X_m \subseteq X_{n-1}} \Big\| \\ &\geq \operatorname{dist}(u_n, X_{n-1}) \\ &\geq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Die Folge $\left(\frac{Au_n}{\lambda_n}\right)$ besitzt also keine konvergente Teilfolge. Sei $\lambda \neq 0$. Dann besitzt auch (Au_n) keine konvergente Teilfolge, denn falls doch würde auch die Folge $\left(\frac{Au_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)$ konvergieren. Also haben wir einen Widerspruch zu A kompakt, d.h. $\lambda = 0$. ■

Beweis (Satz 3.5 (iii)): Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{R} \,\big|\, |\lambda| \geq \frac{1}{n}\} =: \sigma_n$$

entweder leer oder endlich. Angenommen sie sei unendlich, da $\sigma(A)$ beschränkt ist, gibt es einen Häufungspunkt und wegen Lemma 3.6 ist der Häufungspunkt die 0, ein Widerspruch zu $|\lambda| \geq \frac{1}{n}$. Aber es ist

$$\sigma(A) \setminus \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n,$$

$\sigma(A) \setminus \{0\}$ ist also höchstens abzählbar. Mit Lemma 3.6 folgt die Behauptung. ■

- Spezialfall $X = H$, A selbstadjungiert.

3.9 Definition. *Ein Operator $A \in L(H)$ heißt **selbstadjungiert**, wenn $A = A^*$, d.h. für alle u, $v \in H$ gilt*

$$(Au, v) = (u, Av). \tag{3.10}$$

3.11 Satz. *Für einen selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ setzen wir*

$$m := \inf_{u \in H,\, \|u\|=1} (Au, u),$$

$$M := \sup_{u \in H,\, \|u\|=1} (Au, u).$$

Dann gilt $\sigma(A) \subseteq [m, M]$ und $m, M \in \sigma(A)$

Beweis : (i) Für alle $u \in H$ ist $\left(A\frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|}\right) \leq M$ und somit

$$(Au, u) \leq M\|u\|^2. \tag{3.12}$$

Sei $\lambda > 0$, dann ist für alle $u \in H$

$$(\lambda u - Au, u) \geq (\lambda - M)\|u\|^2 = \alpha\|u\|^2,$$

mit $\alpha > 0$, $\lambda I - A$ induziert also eine koerzive, beschränkte Bilinearform. Mit dem Lemma von Lax-Milgram gibt es für alle $f \in H$ ein eindeutiges $u \in H$ mit

$$\lambda u - Au = f,$$

d.h. $\lambda I - A$ ist bijektiv, also $\lambda \in \rho(A)$.
(ii) Wir zeigen $M \in \sigma(A)$. Wir definieren eine Bilinearform durch

$$a(u, v) := (Mu - Au, v).$$

Da A selbstadjungiert ist, ist $a(.,.)$ symmetrisch und wegen (3.12) ist

$$a(u, u) \geq 0.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $a(.,.)$ ergibt:

$$|a(u, v)| \leq a(u, u)^{\frac{1}{2}} a(v, v)^{\frac{1}{2}},$$

d.h. für alle $u, v \in H$ gilt

$$\begin{aligned} |(Mu - Au, v)| &\leq (Mu - Au, u)^{\frac{1}{2}} (Mv - Av, v)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{\text{C.S. für } (.,.)}{\leq} (Mu - Au, u)^{\frac{1}{2}} (M + \|A\|)^{\frac{1}{2}} \|v\| \end{aligned}$$

Wähle $v = Mu - Au$, dann ist

$$\|Mu - Au\|^2 \leq c(Mu - Au, u)^{\frac{1}{2}} \|Mu - Au\|,$$

d.h.

$$\|Mu - Au\| = c(Mu - Au, u)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.13}$$

Wegen der Definition von M gibt es $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n\| = 1$ und $(Au_n, u_n) \to M$ und wegen (3.13) folgt

$$\|Mu_n - Au_n\| \to 0.$$

Also ist $M \in \sigma(A)$, denn falls nicht wäre $M \in \rho(A)$, d.h. $(MI - A)^{-1}$ existiert und ist stetig. Somit folgt

$$(MI - A)^{-1}(Mu_n - Au_n) = (MI - A)(MI - A)^{-1}(u_n) \to 0,$$

d.h. $u_n \to 0$, ein Widerspruch zu $\|u_n\| = 1$.
(iii) Die Aussagen für m folgen durch Übergang von A zu $-A$. ∎

3.14 Folgerung. *Sei $A \in L(H)$ ein selbstadjungierter Operator mit $\sigma(A) = \{0\}$. Dann ist $A = 0$.*

Beweis : Wegen Satz 3.11 ist $\inf\limits_{\|u\|=1} (Au, u) \in \sigma(A)$ und auch $\sup\limits_{\|u\|=1} (Au, u) \in \sigma(A)$. Für alle $u \in H$ ist also $(Au, u) = 0$. Für alle $u, v \in H$ ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= (A(u + v), u + v) - (Au, u) - (Av, v) \\ &= (Au, u) + (Av, v) + (Au, v) + (Av, u) - (Au, u) - (Av, v) \\ &= 2(Au, v) \end{aligned}$$

d.h. $Au = 0$ für alle u und somit $A = 0$. ∎

3.15 Satz. *Sei H ein separabler Hilbertraum und A ein kompakter, selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein vollständiges Orthonormalsystem bestehend aus Eigenvektoren von A.*

Beweis : Seien $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ die verschiedenen Eigenwerte von A außer der Null und $\lambda_0 := 0$. Definiere $H_0 := N(A)$ und $H_n := N(A - \lambda_n I)$. Wegen Satz 2.7 ist $0 < \dim H_n < \infty$, $n \geq 1$ und $0 \leq \dim H_0 \leq \infty$. Wir zeigen:

$$H = \bigoplus_{n\geq 0} H_n \tag{3.16}$$

d.h.
(i) H_n sind paarweise orthogonal, d.h. für alle $u_n \in H_n$, $u_m \in H_m$, $m \neq n$ gilt:

$$(u_n, u_m) = 0. \tag{3.17}$$

(ii) Der durch $(H_n)_{n\geq 0}$ generierte Vektorraum ist dicht in H, d.h.

$$\overline{\operatorname{span}\{H_n \,|\, n \geq 0\}}^H = H. \tag{3.18}$$

Aus (3.16) folgt dann die Behauptung, denn zu jedem H_n gibt es eine Basis (v_i^n), $i = 1, \ldots, \dim H_n$. Nach Lemma 3.2 aus Kapitel 5 gibt es ein Orthonormalsystem (w_i^n), $i = 1, \ldots, \dim H_n$, wobei die w_i^n Eigenvektoren sind. Wegen (3.17) ist also

$$\{(w_i^n),\ i = 1, \ldots, \dim H_n,\ n \geq 0\}$$

ein Orthonormalsystem und wegen (3.18) ist es vollständig und der Satz ist bewiesen.
(i) Sei $x_n \in H_n$ und $x_m \in H_m$, $n \neq m$. Es ist

$$Ax_n = \lambda_n x_n \qquad | \cdot x_m,$$

$$Ax_m = \lambda_m x_m \qquad | \cdot x_n.$$

Also folgt

$$\lambda_m(x_n, x_m) = (Ax_m, x_n) \overset{A\,\text{selbstadjungiert}}{=} (Ax_n, x_m) = \lambda_n(x_n, x_m).$$

Da $\lambda_n \neq \lambda_m$ ist folgt $(x_n, x_m) = 0$.
(ii) $X := \operatorname{span}\{H_n \,|\, n \geq 0\}$. Wir müssen zeigen, dass $\overline{X} = H$ ist. Es ist $A(X) \subseteq X$, denn jedes $x \in X$ hat eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in H_i$, d.h.

$$Ax = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A x_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i x_i \in X.$$

Außerdem ist $A(X^\perp) \subseteq X^\perp$, denn sei $u \in X^\perp$, $v \in X$, dann ist

$$(Au, v) = (u, Av) = 0.$$

Der Operator

$$A|_{X^\perp} =: A_0 : X^\perp \to X^\perp$$

ist somit kompakt. Außerdem ist A_0 beschränkt, linear und selbstadjungiert, denn seien $u, v \in X^\perp$, dann folgt

$$(A_0 u, v) = (Au, v) = (u, Av) = (u, A_0 v).$$

$\sigma(A_0) = \{0\}$, denn sei $\lambda \in \sigma(A_0) \setminus \{0\}$, dann ist $\lambda \in EW(A_0)$, es gibt also ein $u_0 \in X^\perp$, $u_0 \neq 0$, so dass

$$Au_0 = A_0 u_0 = \lambda u_0.$$

λ ist also auch ein Eigenwert von A, d.h. es gibt ein n, so dass $\lambda = \lambda_n$ ist und somit

$$u_0 \in H_n \cap X^\perp,$$

d.h. aber $u_0 = 0$, ein Widerspruch zu $u_0 \neq 0$. Nach Folgerung 3.14 ist dann $A_0 = 0$, also

$$X^\perp \subseteq N(A) = H_0 \subseteq X$$

und somit $X^\perp = \{0\}$. Dann folgt

$$\overline{X} = H,$$

wie wir in den Übungen gezeigt haben. ■

• Satz 3.15 für A selbstadjungiert, kompakt und $\dim H = \infty$, dann gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren

$$\{\omega_n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\},$$

so dass alle $u \in H$ eine Darstellung

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \omega_n)\omega_n$$

haben, es folgt also

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, \omega_n)\omega_n.$$

Hier sind die λ_n allerdings nicht notwendig verschieden.