Abteilung für Angewandte Mathematik 8.1.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 10

Abgabe: Montag, den 15. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $|\cdot|$ eine äquivalente Norm auf X, die zusätzlich gleichmäßig konvex ist. Zeigen Sie, dass es für jedes $k > 1$ eine gleichmäßig konvexe Norm $|||\cdot|||$ gibt, die äquivalent zu $\|\cdot\|$ ist und

$$\|x\| \leq |||x||| \leq k \|x\|$$

für alle $x \in X$ erfüllt.

Tipp: $|||x|||^2 = \|x\|^2 + \alpha |x|^2$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei c_0 der Raum der Nullfolgen versehen mit der Supremumsnorm. Für $z \in l^1$ sei $\psi_z : c_0 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\psi_z(x) := \sum_{j=1}^{\infty} z_n x_n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $z \mapsto \psi_z$ ein isometrischer Isomorphismus von l^1 nach $(c_0)^*$ ist.

Tipp zur Surjektivität: Für $\lambda \in c_0^*$ definiere $z_n := \lambda(e_n)$, wobei e_n die Folge ist, die an der n-ten Stelle gleich Eins und sonst gleich Null ist. Zeigen Sie, dass $(\lambda, x) = \psi_z(x)$ für alle $x \in c_{00}$. Hierbei ist c_{00} der Raum der Folgen, die nur endlich viele von Null verschiedene Folgenglieder haben. Nach Woche 3, Aufgabe 4 ist c_{00} dicht in c_0.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei X ein Banachraum.

(a) Sei $f_n \in X^*$ derart, dass $\langle f_n, x \rangle$ für jedes $x \in X$ konvergiert. Zeigen Sie, dass es ein $f \in X^*$ gibt so, dass $f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$.

(b) Sei X zusätzlich reflexiv. Sei $x_n \in X$ derart, dass $\langle f, x_n \rangle$ für jedes $f \in X^*$ konvergiert. Zeigen Sie, dass es ein $x \in X$ gibt so, dass $x_n \rightharpoonup x$.

(c) Zeigen Sie, dass man auf die Voraussetzung „reflexiv“ in (b) nicht verzichten kann.

Tipp: Betrachten Sie $x_n := (\underbrace{1, \dots, 1}_{\text{n mal}}, 0, 0, \dots)$ und $X := c_0$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei X ein separabler Banachraum und sei $f_n \in X^*$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie auf direktem Wege (d.h. ohne Satz 4.12 über die Metrisierbarkeit von B_{X^*} bzgl. der Schwach-$*$-Topologie $\tau(X^*, X)$ zu benutzen), dass es eine Teilfolge von f_n gibt, welche schwach-$*$-konvergiert. Tipp: Diagonalfolgenargument.