Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

15.1.2007

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 11

Abgabe: Montag, den 22. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: 7 Punkte

Ziel dieser Aufgabe ist es die Umkehrung von Satz 4.13 aus der Vorlesung zu beweisen: Sei X ein Banachraum und sei B_X metrisierbar in der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$. Dann ist X^* separabel.

Gehen Sie wie folgt vor: Sei $U_n := \{x \in B_X \,:\, d(x, 0) < \frac{1}{n}\}$. Wähle hierzu eine endliche Menge $\Phi_n \subset X^*$ und $\varepsilon_n > 0$ so, dass $V_n \subset U_n$, wobei

$$V_n := \{x \in B_X \,:\, |\langle f, x\rangle| < \varepsilon_n \text{ für alle } f \in \Phi_n\}.$$

Sei $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ und sei E der von D aufgespannte lineare Teilraum von X^*. Mit Hilfe eines Widerspruchsarguments soll nun gezeigt werden, dass E dicht in X^* bzgl. der starken Topologie von X^* ist. Sei also $\overline{E} \neq X^*$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in X^{**}$ mit $\|\xi\|_{X^{**}} = 1$ und ein $f_0 \in X^*$ gibt so, dass $\langle \xi, f_0\rangle > 1$ und $\langle \xi, f\rangle = 0$ für alle $f \in E$.

(b) Sei $W := \{x \in B_X \,:\, |\langle f_0, x\rangle| < 1/2\}$. Zeigen Sie $V_{n_0} \subset W$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie, dass es ein $x_1 \in B_X$ gibt mit $\big|\langle f_0, x_1\rangle - \langle \xi, f_0\rangle\big| < 1/2$ und $\big|\langle f, x_1\rangle - \langle \xi, f\rangle\big| < \varepsilon_{n_0}$ für alle $f \in \Phi_{n_0}$.

(d) Folgern Sie, dass $x_1 \in V_{n_0}$ und $\langle f_0, x_1\rangle > 1/2$.

(e) Schließen Sie hieraus den gewünschten Widerspruch.

(f) Begründen Sie, wieso hieraus folgt, dass X^* separabel ist.

Aufgabe 2: 7 Punkte

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum und sei $C \subset X$ konvex, nicht leer und abgeschlossen.

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in X$ genau ein Element aus C gibt, welches $\inf_{y \in C} \|y - x\|_X$ annimmt. Dieses Element bezeichnen wir mit $P_C x$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Minimalfolge $y_n \in C$, d.h. jede Folge mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = \inf_{y \in C} \|y - x\|$, stark gegen $P_C x$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass $P_C : X \to X$ stetig ist.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Sei $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ mit $p, q \in [1, \infty]$. Sei r zwischen p und q, dann gilt $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$ für ein $\theta \in [0, 1]$. (Hierbei gilt die Konvention $1/\infty = 0$.) Zeigen Sie, dass $f \in L^r(\Omega)$ und

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \, \|f\|_q^{\theta}.$$