Abteilung für Angewandte Mathematik 22.1.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 12

Abgabe: Montag, den 29. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: 5 Punkte

Sei $1 \leq p < \infty$ und $u_n, u \in L^p(\Omega)$ mit $u_n \rightharpoonup u$ schwach in $L^p(\Omega)$. Weiterhin gelte $u_n \to v$ fast überall. Zeigen Sie, dass $u = v$ gilt.

Tipp: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe des Lemmas von Fatou, dass $v \in L^p(\Omega)$ gilt und v fast überall endlich ist. Sei nun $E_k := \{x \in \Omega : \sup_{n \geq k} |u_n(x)| \geq k\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $|\cap_k E_k| = 0$ und $\lim_{k\to\infty} |E_k| = 0$. Benutzen Sie dominierte Konvergenz auf die Funktion $u_n w \chi_{\Omega \setminus E_k}$ für ein beliebiges $w \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Folgern Sie, $u = v$ fast überall auf $\Omega \setminus E_k$.

Aufgabe 2: 5 Punkte

Sei $1 \leq p < \infty$ und $1 \leq q < \infty$.

(a) Zeigen Sie, das $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\{f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) : \|f\|_q \leq 1\}$ abgeschlossen in $L^p(\Omega)$ ist.

(c) Sei $f_n \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ und sei $f \in L^p(\Omega)$. Weiterhin gelte $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ mit $\sup_n \|f_n\|_q \leq C$. Sei r zwischen p und q mit $r \neq q$. Zeigen Sie, dass $f \in L^r(\Omega)$ und $f_n \to f$ in $L^r(\Omega)$.

Aufgabe 3: 5 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

(a) Sei $f \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(b) Sei $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$. Weiterhin sei $\sup_{1 \leq p < \infty} \|f\|_p < \infty$. Zeigen Sie, dass $f \in L^\infty(\Omega)$ ist.

(c) Konstruieren Sie eine Funktion $\bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(0,1)$ derart, dass $f \notin L^\infty(0,1)$.

Aufgabe 4: 5 Punkte

Sei φ eine additive Mengenfunktion auf $\mathcal{B}$ mit beschränkter Variation. Für alle $E \in \mathcal{B}$ definieren wir $|\varphi|(E) := \sup \sum_{k=1}^n |\varphi(E_k)|$, wobei das Supremum über alle disjunkten Zerlegungen der Menge E aus $\mathcal{B}$ gebildet wird.

(a) Zeigen Sie, dass $|\varphi|(E)$ ebenfalls eine additive Mengenfunktion auf $\mathcal{B}$ mit beschränkter Variation ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$|\varphi|(E) = \sup_{E_1, E_2 \in \mathcal{B} \,:\, E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \emptyset} \big(\varphi(E_1) - \varphi(E_2)\big).$$

(c) Zeigen Sie, dass für alle $E \in \mathcal{B}$ gilt: $-|\varphi|(E) \leq \varphi(E) \leq |\varphi|(E)$.