Abteilung für Angewandte Mathematik 29.1.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 13

Abgabe: Montag, den 6. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $\Omega := (0,1)$ und $f_n(x) := n\,e^{-nx}$. Zeigen Sie:

(a) $f_n \to 0$ fast überall und $\{f_n\}$ ist beschränkt in $L^1(\Omega)$.

(b) $f_n \not\to 0$ in $L^1(\Omega)$ und $f_n \not\rightharpoonup 0$ schwach in $L^1(\Omega)$.

(c) Es existiert keine Teilfolge von f_n, welche schwach in $L^1(\Omega)$ konvergiert.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Seien $f_n, f \in L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ derart, dass $f_n \to f$ fast überall und $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Folgern Sie hieraus $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Folge $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt, so dass $\|u_n\|_\infty \leq \|u\|$, $u_n \to u$ fast überall und $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in der $*$-schwachen Topologie von $L^\infty(\Omega)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $u \geq 0$ die Folge u_n so gewählt werden kann, dass $u_n \geq 0$.

(c) Zeigen Sie, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^\infty(\Omega)$ bzgl. der $*$-schwachen Topologie ist.

Definition: Seien X, Y Banachräume und sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator. T heißt *kompakt*, wenn T stetig ist und beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet. T heißt vollstetig, wenn T stetig ist und schwach konvergente Folgen auf stark konvergente Folgen abbildet.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Seien H_1 und H_2 Hilberträume und $T : H_1 \to H_2$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, das T genau dann kompakt ist, wenn T vollstetig ist.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Für $d_n \in l^\infty$ sei $T : l^2 \to l^2$ definiert durch $T\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := \big(d_n a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass T genau dann ein vollstetiger, linearer Operator ist, wenn $d_n \in c_0$ gilt.