Abteilung für Angewandte Mathematik 6.2.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 14

Abgabe: Montag, den 13. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Zeigen Sie, dass jeder unendlichdimensionale, separable Hilbertraum H isometrisch isomorph zu l^2 ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Seien X_1, X_2, X_3 Banachräume, $K \in K(X_1, X_2)$ und und $T \in L(X_2, X_3)$. Ferner sei T injektiv. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ gibt so, dass

$$\|Kx\|_{X_2} \le \varepsilon \|x\|_{X_1} + C_\varepsilon \|TKx\|_{X_3}$$

für alle $x \in X_1$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ und

$$(Kf)(x) := \int_\Omega K(x,y) f(y)\, dy.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt ist.
Tipp: Approximieren Sie K durch $K_n \in C(\overline{\Omega \times \Omega})$ und benutzen Sie Arzela Ascoli.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei A ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H, d.h. $(Ax, y) = (x, Ay)$ für alle $x, y \in H$. Zeigen Sie, dass

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$$

Tipp: Betrachten Sie $\frac{1}{4}(A(x+y), x+y) - (A(x-y), (x-y))$ mit $y = \lambda\, z$ und benutzen Sie die Parallelogrammgleichung.

Aufgabe 5: **5 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum und $A, B \in L(H; H)$. Man sagt $A \ge B$ genau dann, wenn $A - B$ positiv semidefinit ist, d.h. $\forall\, x \in H \,:\, \big((A-B)x, x\big) \ge 0$. Zeigen Sie:

(a) „$\ge$" ist transitiv ($A \ge B$, $B \ge C \Rightarrow A \ge C$), reflexiv ($A \ge A$) und additiv ($A \ge B$, $C \ge D \Rightarrow A + C \ge B + D$).

(b) Sind A, B selbstadjungiert mit $A \ge B$ und $B \ge A$, so folgt $A = B$.

(c) Sind A, B selbstadjungiert und $A \ge B \ge 0$, so folgt $\|A\|_{L(H;H)} \ge \|B\|_{L(H;H)}$.

(d) Sei H separabel und sei $A_j, B \in L(H; H)$ selbstadjungiert mit $A_{j+1} \ge A_j$ und $B \ge A_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann existiert $A \in L(H; H)$ mit $A_j x \rightharpoonup Ax$ für alle $x \in H$.

Tipp: Wählen Sie vollständiges Orthonormalsystem e_n und eine Teilfolge von A_j so, dass $A_j e_n \rightharpoonup A e_n$ für $j \to \infty$. Für die Konvergenz der ganzen Folge: Nutzen Sie $(A_j x, y) = \frac{1}{4}((A_j(x+y), x+y) - (A_j(x-y), x-y))$.