Abteilung für Angewandte Mathematik 30.10.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 2

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa1_ws06/

Abgabe: Montag, den 6. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **8 Punkte**

Seien $X = (X, \tau)$ und $Y = (Y, \sigma)$ topologische Räume und $f : X \to Y$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist stetig. (Definition mittels Umgebungen)

(b) Urbilder offener Mengen sind offen.

(c) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Sind X und Y zudem metrische Räume, so sind (a), (b) und (c) äquivalent zu

(d) f ist folgenstetig.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, x_0)$ stetig ist.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig und $M \subset X$ kompakt. Zeigen Sie, dass $f(M)$ kompakt ist.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $X = (X, \tau)$ ein topologischer Raum. Für $x \in X$ sei $V(x)$ das System der durch τ erzeugten Umgebungen. Sei nun

$$\mathcal{O} := \{U \subset X \,:\, \text{für alle } x \in U \text{ gilt } U \in V(x)\},$$

d.h. $\mathcal{O}$ besteht aus all den Mengen, die Umgebung aller ihrer Punkte sind. Zeigen Sie $\mathcal{O} = \tau$.