Abteilung für Angewandte Mathematik 13.11.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 4

Abgabe: Montag, den 20. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: 6 Punkte

Sei V ein normierter Vektorraum und $g : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

(a) g ist unterhalbstetig genau dann, wenn $\operatorname{epi}(g)$ abgeschlossen ist.

(b) g ist unterhalbstetig genau dann, wenn $\{x \in V : g(x) > \lambda\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ offen ist.

(c) g ist konvex genau dann, wenn $\operatorname{epi}(g)$ konvex ist.

(d) Sei $g_j : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $j \in J$, eine Familie unterhalbstetiger Funktionen. Dann ist $g := \sup_{j \in J} g_j$ (punktweise definiert) unterhalbstetig.

Aufgabe 2: 3 Punkte

Sei V ein normierter Vektorraum und $u \in V$ mit $u \neq 0$. Dann existiert ein $f \in V^*$ mit $\|f\|_{V^*} = \|u\|_V$ und $\langle f, u\rangle = \|u\|_V^2$. Sei zusätzlich $\|\cdot\|_{V^*}$ strikt konvex, d.h. aus $\|f_0\|_{V^*} = \|f_1\|_{V^*} = 1$, $f_0 \neq f_1$ folgt $\|(1-t)f_0 + tf_1\|_{V^*} < 1$ für alle $t \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass f eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \notin C$. Zeigen Sie, dass es ein lineares Funktional $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $\|f\| = 1$ und $f(x_0) \leq \alpha \leq f(x)$ für alle $x \in C$.

Tipp: Nehmen sie eine Dichte Teilmenge $\{c_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C$ und betrachten Sie $C_n := \operatorname{conv}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Aufgabe 4: 5 Punkte

Sei V ein Banachraum und sei $C \subset V$ konvex. Zeigen Sie:

(a) Das Innere $\operatorname{Int}(C)$ von C ist konvex.

(b) Gilt $\operatorname{Int}(C) \neq \emptyset$, so ist $\overline{\operatorname{Int}(C)} = \overline{C}$.