Abteilung für Angewandte Mathematik 20.11.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 5

Abgabe: Montag, den 27. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei X ein Banachraum und $f \in X'$ mit $f \neq 0$. Wir betrachten die Hyperebene $E := \{f = 0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{dist}(x, E) = \inf_{y \in E} \|x - y\| = \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|f\|}. \tag{1}$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst $|\langle f, x\rangle| \leq \|f\| \operatorname{dist}(x, E)$ und dann für festes $u \in X/E$, dass $y(x) := x - \frac{\langle f,x\rangle}{\langle f,u\rangle} u \in E$.

Definition: Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt gleichmäßig konvex, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$\|x\| = \|y\| = 1 \quad \text{und} \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1 - \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|x - y\| \leq \varepsilon.$$

Bemerkung: Die Räume $L^p(\mathbb{R})$ mit $1 < p < \infty$ sind gleichmäßig konvex.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum.

(a) Seien $x_n, y_n \in X$ Folgen mit $\|x_n\|, \|y_n\|, \|(x_n + y_n)/2\| \to 1$. Zeigen Sie, dass dann $\|x_n - y_n\| \to 0$ gilt.

(b) Sei V eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge von X und $x_0 \in X$. Folgern Sie aus (a), dass es genau ein $v \in V$ gibt $\operatorname{dist}(x_0, V) = \|x_0 - v\|$. (Dieses v nennt man auch Bestapproximierende von x_0 in V.)

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Für $1 \leq p < \infty$ sei $\varphi_p(t) := \frac{1}{p}|t|^p$. Für $1 < p < \infty$ gilt nach Vorlesung $(\varphi_p)^* = \varphi_{p'}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Wir setzen dadurch motiviert $\varphi_\infty := (\varphi_1)^*$. Berechnen Sie φ_∞ und $(\varphi_\infty)^*$. Verifizieren Sie, ob φ_∞ eine Young-Funktion ist. Zeigen Sie, dass die von φ_∞ auf $\mathbb{R}$ erzeugte Orliczklasse gleich dem Einheitsball von $L^\infty(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass es eine Funktion $g \in C([0,1])$ gibt, welche in keinem Punkt des Intervalls $[0, 1/2]$ differenzierbar ist. Betrachten Sie dazu für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$M_n := \Big\{ f \in C([0,1]) \,:\, \text{es gibt ein } x_0 = x_0(f) \in [0, 1/2] \text{ mit } \sup_{0<h<1/2} h^{-1}|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq n \Big\}$$

und beweisen Sie, dass M_n in $C([0,1])$ abgeschlossen ist, aber keine inneren Punkte besitzt.