Abteilung für Angewandte Mathematik 27.11.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 6

Abgabe: Montag, den 4. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Seien $X_1, \dots, X_n$ Banachräume und $b : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ multilinear. Weiterhin sei für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Abbildung $y_i \mapsto b(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $X_i \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$|b(x_1, \dots, x_n)| \le C \, \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}.$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $|||\cdot|||$ eine Norm auf $C([0,1])$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $(C([0,1]), |||\cdot|||)$ ist vollständig.

(ii) Aus $\lim_{n\to\infty} |||f_n||| = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$.

Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$ äquivalent zur der Standardnorm $\|\cdot\|_\infty$ von $C([0,1])$ ist.

Tipp: Wenden Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die Abbildung $f \mapsto f$, $(C([0,1]), |||\cdot|||) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ an.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Seien E und F Banachräume und $A \in L(E,F)$. Zeigen Sie, dass $R(A)$ in F abgeschlossen ist genau dann, wenn ein $C > 0$ existiert derart, dass zu jedem $x \in E$ ein $\xi \in E$ existiert mit $A\xi = Ax$ und $\|\xi\| \le C \, \|A\xi\|$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei E ein Banachraum und sei $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex und unterhalbstetig. Sei $D(\varphi) := \{x \in E : \varphi(x) < \infty\}$ und sei $x_0 \in \operatorname{Int}(D(\varphi))$. Zeigen Sie:

(i) Es existiert ein $R > 0$ und ein $M > 0$ so, dass

$$\|x - x_0\| \le R \qquad \Rightarrow \|\varphi(x)\| \le M.$$

Tipp: Betrachten Sie die Mengen $F_n := \{x \in E : \|x - x_0\| \le \rho \text{ und } \varphi(x) \le n\}$.

(ii) Sei $r \in (0,R)$ (mit R wie aus (i)). Dann existiert $L > 0$ derart, dass

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le L \, \|x_1 - x_2\| \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in E \text{ mit } \max_{i=1,2} \|x_i - x_0\| \le r.$$