Abteilung für Angewandte Mathematik 04.12.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 7

Abgabe: Montag, den 11. Dezember, vor der Vorlesung

Definition: Sei ℓ^∞ der Raum der Folgen versehen mit der Supremumsnorm. Weiterhin sei ℓ^1 der Raum der summierbaren Folgen versehen mit der Norm $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} := \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Außerdem sei c_0 der Raum der Nullfolgen.

Bemerkung: Sowohl ℓ^∞ als auch ℓ^1 sind Banachräume. Es gilt $\ell^1 \subset c_0 \subset \ell^\infty$ und $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ (Isometrie). Nach Aufgabe 4, Woche 3 wissen wir, dass c_0 ein abgeschlossener Teilraum von ℓ^∞ ist.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $E := \ell^1$, dann ist $E^* = l^\infty$. Definiere den Operator $T : l^1 \to l^1$ durch

$$T\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := \left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bestimmen Sie $N(T)$, $N(T)^\perp$, T^*, $R(T^*)$ und $\overline{R(T^*)}$. Folgern Sie $\overline{R(T^*)} \subsetneqq N(T)^\perp$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $E := \ell^1$, dann ist $E^* = l^\infty$. Sei $N := c_0 \subset E^*$ der Raum der Nullfolgen. Bestimmen Sie

$$N^\perp = \{x \in E : \langle f, x\rangle = 0 \text{ für alle } f \in N\},$$
$$N^{\perp\perp} = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle = 0 \text{ für alle } x \in N^\perp\}.$$

Verifizieren Sie $N^{\perp\perp} \neq N$.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei $E := C([0,1])$ mit der üblichen Norm. Wir betrachten den Operator $A : D(A) \to E$ mit $D(A) := C^1([0,1]) \subset E$ und $Au := u'$.

(a) Zeigen Sie $\overline{D(A)} = E$.

(b) Ist A beschränkt?

(c) Ist A abgeschlossen?

(d) Sei $B : D(B) \to E$ mit $D(B) := C^2([0,1]) \subset E$ und $Bu := u'$. Ist B abgeschlossen?

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei E ein Banachraum und F ein Unterraum. Zeigen Sie: F ist dicht in E genau dann, wenn $F^\perp = \{0\}$.