Abteilung für Angewandte Mathematik 11.12.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

WS 2006/07 — Woche 8

Abgabe: Montag, den 18. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Seien X, Y Banachräume und $A \in L(X, Y)$. Sei $q : x \mapsto \hat{x}$ die Quotientenabbildung von X auf $X/N(A)$ (Vgl. Aufgabe 3 in Woche 3). Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $\hat{A} \in L(X/N(A), Y)$ gibt mit $\hat{A} \circ q = A$. Zeigen Sie, dass $\|\hat{A}\|_{L(X/N(A),Y)} = \|A\|_{L(X,Y)}$. Zeigen Sie weiterhin, dass $\hat{A}$ injektiv ist.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Seien X, Y Banachräume und $T_k \in L(X, Y)$ eine Folge mit $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\| = \infty$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in X$ gibt mit $\sup_{k \in \mathbb{N}} T_k(x) = \infty$.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Seien $f_n, f \in C^0([0, 1])$ derart, dass f_n schwach gegen f konvergiert. Zeigen Sie, dass f_n punktweise gegen f konvergiert.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $v \in L^2(0, 2\pi)$ eine 2π-periodische Funktion. Definiere $v_n(x) := v(n\,x)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $v_n \rightharpoonup a_0/2$ in $L^2(0, 2\pi)$, wobei $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(x)\,dx$.
Tipp: Fourierreihe:

$$v(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big).$$

Aufgabe 5: **4 Punkte**

(a) Sei $u_n(x) := \sin(nx)$ für $x \in (0, 2\pi)$. Dann ist $u_n \in L^2(0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass $u_n \rightharpoonup 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $(u_n)^2 \rightharpoonup \frac{1}{2}$, wobei $(u_n)^2(x) := (u_n(x))^2$.

Hieraus folgt, dass im Allgemeinen schwach$-\lim(u_n^2) \neq ($schwach$-\lim u_n)^2$.