Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

18.4.2002

Funktionalanalysis II

SS 2002 — Blatt 1

Abgabe: **Donnerstag, 25.4.2002** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei T ein k–kontraktive Abbildung mit $0 \le k < 1$ auf einem vollständigen metrischen Raum (X, d). Sei $x_0 \in X$, $x_{n+1} := Tx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\le \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0), \\ d(x_{n+1}, x) &\le \frac{k}{1-k} d(x_{n+1}, x_n), \\ d(x_{n+1}, x) &\le k\, d(x_n, x). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. Zeigen Sie:

(a) $L(\mathbf{P}, \mathbf{z}, x) = \eta(\mathbf{z}) \det \mathbf{P}$ mit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ist eine Null–Lagrangefunktion.

(b) Für jede C^1 Funktion $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hängt

$$\int_\Omega \eta(\mathbf{u}) \det(\nabla \mathbf{u})\, dx$$

nur von $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$ ab. Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge mit glattem Rand.

Aufgabe 3

Für $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$L(\mathbf{P}) := \operatorname{tr}(\mathbf{P}^2) - \big(\operatorname{tr}(\mathbf{P})\big)^2.$$

Zeigen Sie, dass L eine Null–Lagrangefunktion ist.