Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

25.4.2002

Funktionalanalysis II

SS 2002 — Blatt 2

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa2_SS02/

Abgabe: **Donnerstag, 2.5.2002** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Für $-\infty < a < b < \infty$ und $r > 0$ sei

$$Q := \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^{2+s} \,:\, x, y \in [a, b] \text{ and } \|u\|_{\mathbb{R}^s} \leq r\}.$$

Sei $X := C([a, b]; \mathbb{R}^s)$ und $M := \{u \in X \,:\, \|u\|_X \leq r\}$. Für eine stetige Funktion $F : Q \to \mathbb{R}$ definiere

$$(Au)(x) := \int_a^b F(x, y, u(y))\, dy \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Zeigen Sie, dass $A : M \to X$ kompakt ist.

Aufgabe 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine nicht–leere, kompakte Teilmenge. Ferner sei Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie: Eine Familie $\mathcal{F}$ von stetigen Funktionen $f : M \to Y$ ist genau dann relativ kompakt in $C(M; Y)$, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für jedes $u \in M$ ist $\{f(u) \,:\, f \in \mathcal{F}\}$ relativ kompakt in Y,

(b) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig, d.h. für alle $u \in U$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(u, \varepsilon)$, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt:

$$v \in M,\ d(v, u) < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(v) - f(u)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 3

Sei $K = [a, b]$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$ und $T : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Sei M der Graph von φ, d.h.

$$M := \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a, b]\}$$

Nach Satz 2.26 existiert nun eine Lösung $u \in [a, b]$ mit

$$(\varphi(x) - Tu)(x - u) \geq 0.$$

Verifizieren Sie dies für $[a, b] = [-3, 3]$, bzw. $[a, b] = [0, 3]$, bzw. $[a, b] = [3, 6]$. Geben Sie die Lösungen konkret an.