Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening 2.5.2002

Funktionalanalysis II

SS 2002 — Blatt 3

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa2_SS02/

Abgabe: **Donnerstag, 9.5.2002** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ mit $a > 0$ und seien $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Weiterhin genüge $f : I \times \mathbb{R}$ der **Carathéodory Bedingung**:
Für fast alle $t \in I$ ist $x \mapsto f(t,x)$ stetig und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $t \mapsto f(t,x)$ messbar. Ferner existiere ein $h \in L^1(I)$ mit

$$|f(t,x)| \leq h(t) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, es gibt ein δ mit $0 < \delta < a$ so, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \qquad \text{für fast alle } t \in I_\delta, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

mit $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ mindestens eine Lösung $x \in C(I_\delta)$ besitzt.

Aufgabe 2

Sei X ein reflexiver Banachraum und $S = [a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner seien $f_n, f \in L^1(S,X)$ und $g \in L^1(S)$ mit

$$\|f_n(s)\|_X \leq |g(s)| \qquad \text{für fast alle } s \in S.$$

Zeigen Sie

(a) Aus $f_n(s) \xrightarrow{n} f(s)$ für fast alle $s \in S$ folgt $\int\limits_S f_n(s)\,ds \xrightarrow{n} \int\limits_S f(s)\,ds$.

(b) Aus $f_n(s) \overset{n}{\rightharpoonup} f(s)$ für fast alle $s \in S$ folgt $\int\limits_S f_n(s)\,ds \overset{n}{\rightharpoonup} \int\limits_S f(s)\,ds$.

Aufgabe 3

Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $f : X \to X$ eine kontraktive Abbildung, d.h. $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x,y)$ für alle $x \neq y$. Sei x_0 aus X so, dass die Folge $x_{n+1} := f(x_n)$ eine konvergente Teilfolge x_{n_k} mit Grenzwert x_∞ besitzt. Zeigen Sie, dass x_∞ der eindeutige Fixpunkt von f ist.
Tipp: Gegenannahme $r = d(x_\infty, f(x_\infty)) > 0$. Zeigen Sie, dass $\alpha_n := d(x_n, x_{n+1})$ strikt fallend mit $\alpha_n \geq \frac{r}{2}$ ist. Sei $F : X \times X \setminus \text{Diagonale} : (x,y) \mapsto \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)}$. Dann ist $0 \leq F|_U \leq \kappa < 1$ in einer Umgebung U von $(x_\infty, f(x_\infty))$. Folgern Sie $\alpha_{n_k+1} \leq \kappa\, \alpha_{n_k}$ und daraus den gewünschten Widerspruch.