Institut für Angewandte Mathematik 16.5.2002
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2002 — Blatt 4

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa2_SS02/

<u>Abgabe: **bis Donnerstag, 30.5.2002**</u>

Aufgabe 1

Sei X ein Banachraum, $x_n, x \in X$ und $f_n, f \in X^*$. Zeigen Sie

(a) Aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt $\sup_n \|x_n\|_X < \infty$.

(b) Aus $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ folgt $\sup_n \|f_n\|_{X^*} < \infty$.

(c) Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $f_n \to f$ folgt $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

(d) Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ folgt $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Aufgabe 2

Sei $1 < p < \infty$. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(u) := \begin{cases} |u|^{p-2}u & \text{für } u \neq 0, \\ 0 & \text{für } u = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist strikt monoton und für $p = 2$ sogar stark monoton. Für $p \geq 2$ gilt

$$\langle f(u) - f(v), u - v \rangle \geq c(p)\, |u - v|^p.$$

Aufgabe 3

Sei X ein reeller, reflexiver, separabler Banachraum. Ein Operator $A : X \to X^*$ heißt *radialstetig*, wenn für alle $u, v \in X$ die Abbildung $t \mapsto \langle A(u+tv), v \rangle$, $t \in \mathbb{R}$, stetig ist.
Zeigen Sie, dass für einen monotonen Operator $A : X \to X^*$ die Begriffe radialstetig, demistetig und hemistetig äquivalent sind.