Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

6.6.2002

# Funktionalanalysis II

SS 2002 — Blatt 6

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa2_SS02/

Abgabe: **bis Donnerstag, 13.6.2002**

**Aufgabe 1** (Semimonotone Operatoren sind pseudomonoton)

Sei $X$ ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum und sei $B : X \times X \to X^*$ ein Operator. Ferner sei

$$Au := B(u, u) \qquad \text{für alle } u \in X.$$

Der Operator $A : X \to X^*$ heißt semimonoton genau dann, wenn er folgende Bedingungen erfüllt

(a) Für alle $u, v \in X$ gilt:
$$\langle B(u, u) - B(u, v), u - v\rangle \geq 0.$$

(b) Für alle $u \in X$ ist $v \mapsto B(u, v)$ hemistetig und beschränkt von $X$ nach $X^*$.

(c) Für alle $v \in X$ ist $u \mapsto B(u, v)$ hemistetig und beschränkt von $X$ nach $X^*$.

(d) Aus $u_n \rightharpoonup u$ in $X$ und $\langle B(u_n, u_n) - B(u_n, u), u_n - u\rangle \to 0$ folgt
$$B(u_n, v) \rightharpoonup B(u, v) \qquad \text{in } X^* \text{ für alle } v \in X.$$

(e) Sei $v \in X$. Aus $u_n \rightharpoonup u$ in $X$ und $B(u_n, v) \rightharpoonup w$ in $X^*$ folgt
$$\langle B(u_n, v), u_n\rangle \to \langle w, u\rangle.$$

(f) Der Operator $A$ ist beschränkt.

Zeigen Sie, dass jeder semimonotone Operator $A$ pseudomonoton ist.

Tipp: Sei $u_n \in X$ mit $u_n \rightharpoonup u$ und $\limsup_n \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$. Definiere $X_n := \langle B(u_n, u_n) - B(u_n, u), u_n - u\rangle$. Zeigen Sie, dass für eine geeignete Teilfolge gilt $\lim_n X_n = 0$. Folgern Sie (für die Teilfolge) $B(u_n, v) \to B(u, v)$ und anschließend $(A(u_n), u_n - u) \to 0$. Betrachten Sie nun $\langle B(u_n, u_n) - B(u_n, w), u_n - w\rangle$ für $w = (1-\theta)u + \theta v$. Zu guter letzt folgern Sie $\liminf_n \langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle B(u, u), u - v\rangle$.