Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening 13.6.2002

Funktionalanalysis II

SS 2002 — Blatt 7

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa2_SS02/

Abgabe: **bis Donnerstag, 20.6.2002**

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} -\Delta u + \alpha \sin(u) \sum_{i=1}^{3} \partial_i u &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es ein $\alpha_0 > 0$ existiert, so dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| \le \alpha_0$ und alle $f \in L^2(\Omega)$ das Randwertproblem eine schwache Lösung besitzt.

Aufgabe 2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Untersuchen Sie mit Hilfe der Theorie pseudomonotoner Operatoren, für welche $1 < p < \infty$, das System

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(|\mathbf{D}\mathbf{u}|^{p-2}\mathbf{D}\mathbf{u}\big) + \boldsymbol{\nabla}\pi + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} &= \mathbf{f} \qquad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \qquad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

eine schwache Lösung $\mathbf{u} \in (W_0^{1,p}(\Omega))^3, \pi \in L^{p^*}(\Omega)$ besitzt, wobei $\mathbf{f} \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$. Hierbei bezeichnet $\mathbf{D}\mathbf{u}$ den symmetrischen Anteil des Gradientent, d.h. $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^\top)$. Dabei können Sie folgende Aussagen ohne Beweisbenutzen:

Lemma (Korn). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit Lipschitzrand und $1 < p < \infty$, dann gibt es eine Konstante $A > 0$, so dass für alle $\mathbf{u} \in (W_0^{1,p}(\Omega))^d$ gilt*

$$\|\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\|_p \le A\,\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_p.$$

Lemma (De Rham, 1960). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit Lipschitzrand und $1 < p < \infty$. Sei $\mathbf{F} \in \big((W_0^{1,p}(\Omega))^d\big)^*$ ein Funktional, für das für alle $\mathbf{v} \in (W_0^{1,p}(\Omega))^d$ mit $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ gilt*

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{v}\rangle = 0\,.$$

Dann existiert ein $\pi \in L^{p^*}(\Omega)$ mit $\int_\Omega \pi\,dx = 0$, so dass für alle $\mathbf{v} \in (W_0^{1,p}(\Omega))^d$ gilt

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{v}\rangle = \int_\Omega \pi \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx\,.$$