Institut für Angewandte Mathematik 20.6.2002
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2002 — Blatt 8

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa2_SS02/

Abgabe: **bis Donnerstag, 27.6.2002**

Aufgabe 1

Sei X ein reeller, reflexiver, Banachraum dessen Dualraum X^* strikt konvex ist. Sei $\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ für alle $u \in X$. Zeigen Sie:

(a) Die Dualitätsabbildung

$$J : X \to X^*$$

ist eine eindeutige, surjektive, ungerade, demistetige, maximal monotone, beschränkte und koerzive Abbildung.

(b) Für alle $u \in X$ gilt $Ju = \varphi'(u)$, wobei φ' die Gateaux–Ableitung von φ ist.

(c) Die Normabbildung $\psi : u \mapsto \|u\|$ is Gateaux–differenzierbar auf $X \setminus \{0\}$ und es gilt

$$\psi(u) = \frac{Ju}{\|u\|}$$

für all $u \in X \setminus \{0\}$.

(d) Für jedes $u \in X$ gibt es genau ein Funktional $u^* \in X^*$ mit

$$\langle u^*, u\rangle_X = \|u^*\|\,\|u\| \qquad \text{und} \qquad \|u^*\| = \|u\|.$$

Dieses Funktional ist gegeben durch $u^* := Ju$.

Tipp: Untersuchen sie die Abbildung $A : X \to A^{X^*}$ mit

$$Au = \{u^* \in X^* \,:\, \langle u^*, u\rangle_X = \|u\|^2, \|u^*\| = \|u\|\}.$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie das endliche Durchschnittprinzip, d.h. zeigen Sie:

Eine Menge K ist kompakt genau dann, wenn jedes *zentrierte* System von in K abgeschlossenen Mengen einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Ein System $A_i, i \in I$, heißt *zentriert*, wenn der Durchschnitt beliebiger endlicher Teilsysteme $A_{i_k}, k = 1, \ldots, N$, nichtleer ist.