Institut für Angewandte Mathematik 27.6.2002
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2002 — Blatt 9

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa2_SS02/

Abgabe: **bis Donnerstag, 5.7.2002**

Aufgabe 1

Sei M eine beschränkte Teilmenge eine reflexiven Banachraums X. Zeigen Sie, dass der schwache Abschluss von M mit dem schwachen Folgen–Abschluss übereinstimmt.

Zur Erinnerung:
Die Mengen

$$U_{f_1,\dots,f_n,x_0,\varepsilon} := \{y \in X \,:\, |\langle f_j, x-y\rangle| < \varepsilon,\ j = 1,\dots,n\}$$

mit $f_1,\dots,f_n \in X^*$, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ stellen eine Basis der schwachen Topologie dar. Damit ist der schwache Abschluss von M definiert als

$$A_0 := \{y \in X \,|\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall f_1,\dots,f_n \in X^*\, \exists x \in M \,:\, x \in U_{f_1,\dots,f_n,y,\varepsilon}\}.$$

Der schwache Folgenabschluss ist definiert als

$$A_1 := \{y \in X \,|\, \exists (x_n)_n \,:\, x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x\}.$$

Sie dürfen die folgenden Sätze benutzen:

Satz 1 (Alaoglu–Eberlein–Šmuljan). *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist die Einheitskugel von X sowohl schwach überdeckungskompakt als auch schwach folgenkompakt.*

Satz 2. *Sei X ein separabler, reflexiver Banachraum und sei B die Einheitskugel von X versehen mit der schwachen Topologie. Dann existiert eine Metrik auf B, welche die gleiche Topologie erzeugt.*

Tipps zur Aufgabe: (a) Zeigen Sie $A_1 \subset A_0$. (b) Zeigen Sie, dass für festes $u \in A_0$ eine abzählbare Menge $M_0 \subset M$ existiert, so dass u im Abschluss von M_0 bzgl. der schwachen Topologie von X liegt: Sei B die (schwach–)abgeschlossene Einheitskugel von X^* und sei $n, m \in \mathbb{N}$. Da $u \in A_0$ existiert für alle $f_1,\dots,f_n$ ein v mit $v \in U_{f_1,\dots,f_n,u,1/m} \cap M$, d.h.

$$|\langle f_j, v-u\rangle| < \tfrac{1}{m}. \tag{1}$$

Für festes $v \in M$ ist $V := \{(f_1,\dots,f_n) \in B^n \,:\, (1) \text{ gilt}\}$ eine schwach–offene Menge in B^n. Die Gesamtheit (variierend über $v \in M$) der V überdeckt die schwach–kompakte Menge B^n (als Teilmenge von $(X^*)^n$). Konstruieren Sie hieraus (mit Satz 1) die abzählbare Menge M_0. (c) Sei X_0 der kleinste abgeschlossene Teilraum von X, der u und M_0 umfasst. Dann ist X_0 separabel. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hahn–Banach, dass u in dem schwachen Abschluss von M_0 bzgl. der schwachen Topologie von X_0 liegt. Benutzen Sie nun Satz 2 um eine Folge $u_n \in M_0$ zu finden mit $u_n \rightharpoonup u$ in X_0. Folgern Sie $u_n \rightharpoonup u$ in X.