Funktionalanalysis II

Sommersemester 2002

Prof. Dr. Michael Růžička

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Fixpunktsätze

0.1 Definition. *Sei (X,τ) ein topologischer Raum und sei $T\colon A \subseteq X \to B \subseteq X$ eine Abbildung. Jede Lösung von*

$$Tx = x$$

heißt ***Fixpunkt****.*

Wir werden im Folgenden Fixpunktsätze betrachten, d.h. Sätze, die die Existenz von Fixpunkten unter bestimmten Bedingungen sicherstellen. Eine Abbildung, die keinen Fixpunkt besitzt, ist z.B. die Translation

$$Tx = x + x_0 \qquad\qquad x_0 \in X,\ x_0 \neq 0.$$

Fixpunktsätze sind eines der grundlegenden Hilfsmittel in der nichtlinearen Funktionalanalysis.

Beispiele:

- Nullstellenbestimmung von nichtlinearen Funktionen:

  $$F(x) = 0.$$

  Diese Gleichung kann in ein Fixpunktproblem umgeschrieben werden; einige Möglichkeiten sind:

  $$\begin{aligned} Tx &= x - F(x) && \text{(einfachste Möglichkeit)},\\ Tx &= x - \omega F(x) && \text{(lineare Relaxation mit } \omega > 0),\\ Tx &= x - \big(F'(x)\big)^{-1}F(x) && \text{(Newtonverfahren)}\,. \end{aligned}$$

- Gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachräumen:

  $$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)),\\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

  Für eine gegebene stetige Funktion $f : Q \subseteq \mathbb{R} \times X \to X$, wobei X ein Banachraum ist, ist dieses Anfangswertproblem äquivalent zu folgender Integralgleichung

  $$x(t) = x_0 + \int_0^t f\big(s, x(s)\big)\, ds\,,$$

und kann mit Hilfe des Operators T_{x_0}, definiert durch

$$T_{x_0}x := x_0 + \int_0^t f\big(s, x(s)\big)\, ds\,,$$

in ein Fixpunktproblem umgewandelt werden. Die Sätze von Picard–Lindelöf und von Peano stellen die Existenz von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in Banachräumen sicher.

- Nichtlineare partielle Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit einer nichtlinearen Funktion f. Dieses Problem schreiben wir mit Hilfe von

$$Tu = (-\Delta)^{-1}(f(u))$$

um in ein Fixpunktproblem.

1.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Wir wählen einen konstruktiven Zugang zur Lösung des Fixpunktproblems

$$Tx = x, \qquad x \in M. \tag{1.1}$$

Dazu definieren wir eine *iterative* Folge

$$x_{n+1} = Tx_n\,, \qquad x_0 \in M\,,\ n = 0, 1, 2\ldots\,, \tag{1.2}$$

die unter bestimmten Bedingungen gegen einen Fixpunkt von T konvergiert

1.3 Definition. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Operator $T\colon M \subseteq X \to X$ heißt k–**kontraktiv** genau dann, wenn es ein $k \in (0, 1)$ gibt, so dass für alle $x, y \in M$ gilt:*

$$d(Tx, Ty) \le k\, d(x, y)\,. \tag{1.4}$$

*T heißt **kontraktiv**, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt:*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)\,.$$

1.5 Satz (Banach, 1922). *Sei $M \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene Menge eines vollständigen metrischen Raums (X, d) und*

$$T\colon M \subseteq X \to M \tag{1.6}$$

ein gegebener k–kontraktiver Operator. Dann gilt:

(i) *Die Gleichung* (1.1) *hat genau eine Lösung* $x \in M$*, d.h.* T *hat genau einen Fixpunkt in* M*.*

(ii) *Die durch* (1.2) *definierte iterative Folge* (x_n) *konvergiert gegen die Lösung* x *für alle Anfangswerte* $x_0 \in M$*.*

Beweis : Sei $x_0 \in M$ beliebig. Nach Definition der Folge (x_n) und wegen der k–Kontraktivität des Operators T gilt:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq k\, d(x_{n-1}, x_n) \leq \cdots \leq k^n\, d(x_0, x_1).$$

Dies und die Dreiecksungleichung liefern

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+m-1})\, d(x_0, x_1) \\ &= k^n(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-1})\, d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1), \end{aligned} \tag{1.7}$$

wobei die Summenformel für die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{m-1} k^n = \frac{1-k^m}{1-k} \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$ benutzt wurde. Da $k < 1$ ist, haben wir gezeigt, dass (x_n) eine Cauchy–Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von X folgt daraus, dass es ein Element $x \in X$ gibt, so dass

$$x_n \to x\,, \qquad (n \to \infty).$$

Aufgrund von (1.2) und (1.6) liegen alle Folgenglieder in M. Da M abgeschlossen ist, liegt auch der Grenzwert der Folge x in M. Da T k–kontraktiv ist, ist T auch stetig und man kann in der Gleichung (1.2) n gegen ∞ gehen lassen und erhält

$$x = Tx, \tag{1.8}$$

und damit die Existenz einer Lösung des Problems (1.1). Es bleibt die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Angenommen, x und y seien Lösungen von (1.1), d.h. $Tx = x$ und $Ty = y$. Aufgrund der k–Kontraktivität des Operators T folgt dann

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y)$$

Wegen $k < 1$ muss dann aber $d(x, y) = 0$ gelten, also $x = y$. ■

Wir wollen uns nun durch die Angabe von Gegenbeispielen davon überzeugen, dass alle Voraussetzungen notwendig sind:

(i) $M = (0, 1), \qquad Tx = \frac{x}{2},$
M ist nicht abgeschlossen, die Abbildung besitzt keinen Fixpunkt in M.

(ii) $M = \mathbb{R}, \qquad Tx = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x.$
Für die Ableitung gilt $T'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ und somit folgt nach dem Mittelwertsatz $|Tx - Ty| = |1 - \frac{1}{1+\zeta^2}||x - y| < |x - y|$, d.h. T ist kontraktiv, aber nicht k–kontraktiv; T hat in $\mathbb{R}$ keinen Fixpunkt.

(iii) $M = [0, 1]$, $\quad N = [2, 3]$, $\quad T : M \to N$.
T bildet M nicht in sich selbst ab und hat deshalb natürlich keinen Fixpunkt.

(iv) $M = \emptyset$, T beliebig.
Dann kann T natürlich keinen Fixpunkt haben.

• Für die durch (1.2) definierte Folge kann man folgende *apriori* bzw. *aposteriori Abschätzungen* beweisen: Für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, gilt

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\le \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0)\,, \\ d(x_{n+1}, x) &\le \frac{k}{1-k}\, d(x_{n+1}, x_n)\,, \\ d(x_{n+1}, x) &\le k\, d(x_n, x)\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

In vielen Anwendungen hängt T noch von einem zusätzlichen Parameter $p \in P$ ab. Dabei ist P ein metrischer Raum, der sogenannte *Parameterraum*. In diesem Fall betrachtet man das von $p \in P$ abhängige Fixpunktproblem

$$T_p x_p = x_p\,, \qquad x_p \in M\,,\ p \in P. \tag{1.10}$$

1.11 Folgerung. *Es gelte:*

(i) *T_p erfülle für alle $p \in P$ die Voraussetzung von Satz 1.5, wobei k von p unabhängig ist.*

(ii) *Es existiert ein $p_0 \in P$, so dass für alle $x \in M$ gilt:* $\quad \lim\limits_{p \to p_0} T_p x = T_{p_0} x.$

Dann existiert für alle $p \in P$ eine eindeutige Lösung x_p von (1.10) und

$$\lim_{p \to p_0} x_p = x_{p_0}.$$

Beweis : Sei x_p Lösung von (1.10), die nach Satz 1.5 existiert. Für diese Lösungen gilt wegen der k–Kontraktivität von T_p:

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p_0}) &= d(T_p x_p, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\le d(T_p x_p, T_p x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\le k d(x_p, x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \end{aligned}$$

und somit folgt für $p \longrightarrow p_0$:

$$d(x_p, x_{p_0}) \le \frac{1}{1-k}\, d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \to 0$$

nach (ii), d.h. x_p konvergiert gegen x_{p_0} für $p \to p_0$. ∎

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \qquad x(t_0) = p_0, \tag{1.12}$$

für eine gewöhnliche Differentialgleichung auf $[t_0 - c,\ t_0 + c]$ mit Werten in einem Banachraum X. Wenn f in einer geeigneten Umgebung von (t_0, p_0) stetig ist, dann ist obiges Anfangswertproblem äquivalent zu folgender Integralgleichung:

$$x(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds, \qquad t \in [t_0 - c,\ t_0 + c]\,, \tag{1.13}$$

Die Funktion f ist auf einer Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R} \times X$, mit

$$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X \,\big|\, |t - t_0| \le a, \|x - p_0\| \le b\}\,. \tag{1.14}$$

definiert und hat Werte in X, d.h.

$$f\colon Q \subset \mathbb{R} \times X \to X.$$

Hier ergibt sich ein Problem, denn wir haben weder die Ableitung x' noch das Integral $\int f(s)\, ds$ für Funktionen mit Werten in Banachräumen definiert. Im Prinzip sind die Definitionen analog zu den entsprechenden Begriffen aus der Theorie reellwertiger Funktionen; im nächsten Kapitel (Integration und Differentiation in Banachräumen) werden wir sie exakt angeben. Der folgende Beweis nutzt überhaupt nicht die Struktur von $\mathbb{R}$ und ist deshalb übertragbar auf allgemeine Banachräume X. Wir stellen uns zunächst $X = \mathbb{R}$ in den Rechnungen vor.

1.15 Satz (Picard 1890, Lindelöf 1894). *Sei X ein Banachraum und seien $t_0 \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ und $p_0 \in X$ gegeben. Ferner sei Q wie in (1.14) definiert und $f\colon Q \to X$ sei stetig und genüge den Bedingungen*[1]

$$\begin{aligned} \|f(t,x) - f(t,y)\|_X &\le L\|x - y\|_X \qquad && \forall (t,x), (t,y) \in Q, \\ \|f(t,x)\|_X &\le K && \forall (t,x) \in Q\,, \end{aligned} \tag{1.16}$$

wobei $L, K > 0$ gegeben sind. Dann gilt:

(i) *Wir setzen $c = \min(a, \frac{b}{K})$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $x(t)$ von (1.13) im Intervall $[t_0 - c, t_0 + c]$, die auch die eindeutige Lösung von (1.12) ist.*

(ii) *Die Folge von Approximationen*

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds, \qquad n = 0, 1, \ldots \\ x_0(t) &= p_0, \end{aligned}$$

konvergiert gleichmäßig auf $[t_0 - c, t_0 + c]$ gegen die Lösung $x(t)$.

[1] Wenn f der Bedingung $(1.16)_1$ genügt sagt man, dass f **Lipschitz-stetig** ist.

(iii) *Sei $0 < d < c$ gegeben. Dann besitzt (1.13) für alle p aus einer genügend kleinen Umgebung von p_0 genau eine Lösung $x_p(t)$, die auf $[t_0 - d, t_0 + d]$ definiert ist. Für $p \to p_0$ konvergiert $x_p(t)$ gleichmäßig gegen $x_{p_0}(t)$ auf $[t_0 - d, t_0 + d]$.*

(iv) *Wir setzen $k = 1 - \exp(-Lc)$ und definieren*

$$\|x\|_0 = \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \exp\big(-L|t - t_0|\big)\|x(t)\|_X$$

für $x(t) \in C([t_0 - c, t_0 + c]; X)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_0 &\le \frac{k^n}{1-k}\,\|x_1 - x_0\|_0, \\ \|x_{n+1} - x\|_0 &\le \frac{k}{1-k}\,\|x_{n+1} - x_n\|_0, \\ \|x_{n+1} - x\|_0 &\le k\,\|x_n - x\|_0\,. \end{aligned}$$

Beweis : Wir schreiben (1.13) als Operatorgleichung um in

$$\begin{aligned} Y &= C([t_0 - c, t_0 + c]; X), \\ \|f\|_Y &= \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \|f(t)\|_X, \\ \|f\|_0 &= \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \exp\big(-L|t - t_0|\big)\|f(t)\|_X. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt:

$$\exp(-Lc)\,\|f\|_Y \le \|f\|_0 \le \|f\|_Y,$$

d.h. die Normen $\|.\|_0$ und $\|.\|_Y$ sind äquivalent und $(Y, \|.\|_0)$ ist ein Banachraum. Wir setzen $M = \{f \in Y \mid \|f - p_0\|_Y \le b\}$ und definieren den Operator T_{p_0} durch

$$T_{p_0} \colon M \subseteq (Y, \|\cdot\|_0) \to (Y, \|\cdot\|_0) : x \mapsto y\,, \tag{1.17}$$

wobei

$$y(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\,ds\,. \tag{1.18}$$

Nun überprüfen wir die Voraussetzungen von Satz 1.5:

1. Für eine Folge $(x_n) \subseteq M$, $x_n \to x$ in $(Y, \|\cdot\|_0)$ gilt auch $x_n \to x$ in $(Y, \|\cdot\|_Y)$, da die beiden Normen äquivalent sind. Aufgrund der Definition von M haben wir

$$\|x_n - p_0\|_Y \le b.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert sofort $x \in M$. Somit ist M bzgl. $(Y, \|\cdot\|_0)$ abgeschlossen.

2. Nach Definition von M gilt für alle $t \in [t_0 - c, t_0 + c]$ $\quad \|x(t) - p_0\|_X \leq b$, d.h. $x(t) \in Q$. Also liefert (1.16)$_2$

$$\begin{aligned} \|T_{p_0}x - p_0\|_Y &= \max_{[t_0-c,t_0+c]} \Big\| \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds \Big\|_X \\ &\leq \max_{[t_0-c,t_0+c]} \int_{t_0}^{t} K\, ds \leq cK \leq b, \end{aligned}$$

aufgrund der Definition von c. Also bildet T_{p_0} die Menge M in sich selbst ab, d.h. $T_{p_0} : M \to M$.

3. Für $x, y \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} &\|T_{p_0}x - T_{p_0}y\|_0 \\ &= \max_{t\in[t_0-c,t_0+c]} \exp\big(-L|t-t_0|\big) \Big\| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s)) - f(s,y(s))\, ds \Big\|_X \\ &\leq \max_t \int_{t_0}^{t} L\|x(s)-y(s)\|_X \exp\big(-L|s-t_0|\big) \exp\big(L|s-t_0|\big) \exp\big(-L|t-t_0|\big)\, ds \\ &\leq L\|x-y\|_0 \max_t \int_{t_0}^{t} \exp\big(L|s-t_0| - L|t-t_0|\big)\, ds \\ &\leq \|x-y\|_0 \max_t \big(1 - \exp(-L|t-t_0|)\big) \\ &\leq k\|x-y\|_0\,, \end{aligned}$$

wobei $k = 1 - \exp(-Lc) < 1$. Somit ist T_{p_0} k-kontraktiv auf M bzgl. $(Y, \|.\|_0)$.

Nach Satz 1.5 folgt dann, dass genau ein $x \in M$ existiert mit $x = T_{p_0}x$; somit ist Teil (i) des Satzes bewiesen.
Behauptung (iv) folgt unmittelbar aus (1.9). Insbesondere gilt

$$\|x_n - x\|_0 \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_0 - x_1\|_0 \quad \to 0 \quad (n \to \infty),$$

d.h. $x_n \rightrightarrows x$, da $\|\cdot\|_Y$ äquivalent ist zu $\|\cdot\|_0$ und Konvergenz bezüglich der Maximumsnorm gleichmäßige Konvergenz bedeutet. Damit ist auch Behauptung (ii) bewiesen.
Zum Beweis von (iii) gehen wir analog vor wie oben in 1. – 3., nun mit

$$\begin{aligned} Y &= C([t_0-d, t_0+d]; X), \\ Q &= \{(t,x) \,\big|\, |t-t_0| \leq a, \|x-p_0\|_X \leq b\}, \\ M &= \{f \in Y \,\big|\, \|f - p_0\| \leq b\}. \end{aligned}$$

Wie in 1. – 3. erhalten wir dann, dass für p in einer kleinen Umgebung von p_0 eine eindeutige Lösung x_p von

$$T_p x_p = x_p.$$

existiert. Für $p_n \to p_0$ $(n \to \infty)$ haben wir:

$$\|T_{p_n} x - T_{p_0} x\|_0 = \|p_n - p_0\|_X \to 0.$$

Nach Folgerung 1.11 gilt dann: $x_{p_n} \rightrightarrows x_{p_0}$, $(n \to \infty)$. ■

1.2 Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder

Im Banachschen Fixpunktsatz werden nur geringe Anforderungen an den zugrundeliegenden Raum gestellt, nämlich ein vollständiger, metrischer Raum ist ausreichend, aber es werden relativ starke Anforderungen an den Operator (k–Kontraktivität) gestellt. In den Sätzen von Brouwer (im $\mathbb{R}^n$) und Schauder (in unendlich–dimensionalen Räumen) werden nur geringe Anforderungen an die Operatoren gestellt, dafür werden aber stärkere Anforderungen an den zugrundeliegenden Raum gestellt. Beide benutzen das folgende tiefliegende topologische Resultat:

*Sei $\overline{B_1(0)}$ der abgeschlossene Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$. Es gibt keine stetige Abbildung (**Retraktion**)*

$$R\colon \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)\,,$$

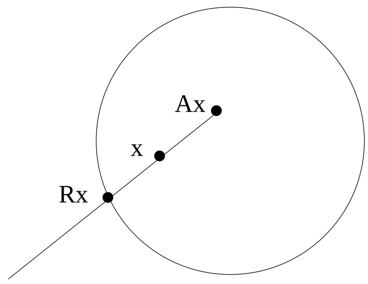
so dass für alle $x \in \partial B_1(0)$ gilt:

$$R(x) = x\,.$$

Man kann sich z.B. vorstellen, man versuchte, eine Gummimembran, die den ganzen Kreis bedeckt, an den Rand zu ziehen; sie muß auf jeden Fall zerreißen. Dieses Resultat ist anschaulich klar, aber keineswegs trivial! Intuitiv kann man sich klarmachen:

Eine stetige Abbildung $A\colon \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in \overline{B_1(0)}$ mit $Ax = x$.

„Beweis:“ Nehmen wir an, dass für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gelte $Ax \neq x$.



Mit Hilfe des Bildes (vgl. Beweis von Satz 2.17)folgt dann, dass es eine stetige Retraktion

$$R\colon \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$$
$$\text{mit } R(x) = x \qquad \forall x \in \partial B_1(0).$$

gibt. Dies ist aber ein Widerspruch zu obiger Aussage. ■

Die analoge Aussage ist in $\mathbb{R}$ einfach zu beweisen.

2.1 Lemma. *Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt in $[a,b]$.*

BEWEIS : Wir setzen

$$g(x) = f(x) - x\,.$$

Da f das Intervall $[a,b]$ auf sich selbst abbildet, gilt:

$$f(a) \geq a\,, \qquad \text{und} \qquad f(b) \leq b\,,$$

was übertragen auf g bedeutet:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0\,, \qquad \text{und} \qquad g(b) = f(b) - b \leq 0\,.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann, dass ein x_0 existiert mit

$$g(x_0) = 0 = f(x_0) - x_0\,,$$

also ist x_0 der gesuchte Fixpunkt. ■

Der Satz von Brouwer

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten den Satz von Brouwer zu beweisen. Durch einen kurzen Ausflug in die Variationsrechnung erhält man einen einfachen analytischen Beweis. Dazu benötigen wir einige Begriffe. Die *Variationsrechnung* beschäftigt sich mit der Untersuchung, insbesondere dem Auffinden von Minimas, von **Energiefunktionalen** $I(\cdot)$ der Form

$$I(\mathbf{w}) \equiv \int_\Omega L\big(\nabla\mathbf{w}, \mathbf{w}(x), x\big)\, dx\,, \tag{2.2}$$

wobei[2] Ω ein glattes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ ist und

$$L : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \tag{2.3}$$

eine gegebene glatte Funktion ist. Man nennt L die **Lagrangefunktion** des Energiefunktionals $I(\cdot)$. Wir werden im folgenden die Bezeichnung

$$L = L(\mathbf{P}, \mathbf{z}, x) = L(p_1^1, \ldots, p_n^m,\, z^1, \ldots, z^m, x_1, \ldots, x_1)$$

für Matrizen[3] $P = (p_j^i) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, Vektoren $z = (z^i) \in \mathbb{R}^m$ und Punkte $x = (x_j) \in \Omega$ benutzen.

[2] Der Gradient ist gegeben durch: $\nabla\mathbf{w} = (\partial_j w^i)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$

[3] Obere Indizes bezeichnen in diesem Abschnitt Zeilenindizes. Desweiteren benutzen wir die Notation $D_{\mathbf{P}}L = (L_{p_1^1}, \ldots, L_{p_n^m})$ und $D_{\mathbf{z}}L = (L_{z^1}, \ldots, L_{z^m})$.

Sei $\mathbf{g} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m$ eine gegebene glatte Funktion. Man betrachtet (2.2) für glatte Funktionen $\mathbf{w} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w} = (w^1, \dots, w^m)$, die auf dem Rand $\partial\Omega$ mit der Funktion $\mathbf{g}$ übereinstimmen, d.h.

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\,. \tag{2.4}$$

Sei nun $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$ ein glattes **Minimum** von (2.2) unter allen glatten Funktionen die (2.4) erfüllen. Dann ist $\mathbf{u}$ notwendigerweise die Lösung eines Systems von partiellen Differentialgleichungen, den sogenannten *Euler–Lagrange–Gleichungen*. Um dies zu beweisen, betrachten wir für $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^m) \in C_0^\infty(\Omega)$ die reellwertige Funktion

$$i(\tau) \equiv I(\mathbf{u} + \tau\mathbf{v}), \qquad \tau \in \mathbb{R}\,.$$

Da auch $\mathbf{u} + \tau\mathbf{v}$ die Randbedingungen (2.4) erfüllt und $\mathbf{u}$ ein Minimum ist, muß i im Punkt 0 ein Minimum haben, d.h. $i'(0) = 0$. Die Ableitung $i'(\tau)$, die man **erste Variation** nennt, kann man explizit berechnen. Es gilt

$$i(\tau) = \int\limits_\Omega L(\nabla\mathbf{u} + \tau\nabla\mathbf{v}, \mathbf{u} + \tau\mathbf{v}, x)\,dx \tag{2.5}$$

und somit

$$\begin{aligned} i'(\tau) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m & L_{p_i^k}(\nabla\mathbf{u} + \tau\nabla\mathbf{v}, \mathbf{u} + \tau\mathbf{v}, x)\partial_i v^k \\ &+ \sum_{k=1}^m L_{z^k}(\nabla\mathbf{u} + \tau\nabla\mathbf{v}, \mathbf{u} + \tau\mathbf{v}, x) v^k\,dx\,. \end{aligned}$$

Aus $i'(0) = 0$ erhalten wir

$$0 = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m L_{p_i^k}(\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u}, x)\partial_i v^k + \sum_{k=1}^m L_{z^k}(\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u}, x) v^k\,dx.$$

Da diese Identität für alle $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, erhalten wir nach partieller Integration die dem Energiefunktional $I(\cdot)$ zugehörigen **Euler–Lagrange–Gleichungen**

$$-\sum_{i=1}^n \partial_i\big(L_{p_i^k}(\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u}, x)\big) + L_z^k(\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u}, x) = 0\,, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{2.6}$$

die in Ω erfüllt sein müssen. Überraschenderweise ist es interessant solche Lagrangefunktionen L zu betrachten für die *alle* glatten Funktionen, eine Lösung von (2.6) sind.

2.7 Definition. *Die Funktion L heißt* ***Null-Lagrangefunktion*** *wenn die zugehörige Euler–Lagrange– Gleichungen* (2.6) *für alle glatten Funktionen erfüllt ist.*

Die Bedeutung von Null–Lagrangefunktionen besteht darin, dass der Wert des zugehörigen Energiefunktional $I(\cdot)$ nur von den Randwerten der Funktion $\mathbf{w}$ abhängt.

2.8 Satz. *Sei L eine Null–Lagrangefunktion und seien $\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}}$ zwei Funktionen aus $C^2(\overline{\Omega})$ mit*

$$\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} \qquad \textit{auf } \partial\Omega\,. \tag{2.9}$$

Dann gilt

$$I(\mathbf{u}) = I(\widetilde{\mathbf{u}}). \tag{2.10}$$

Beweis : Wir definieren $j : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$j(\tau) \equiv I\big(\tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}\big),$$

und erhalten

$$\begin{aligned} j'(\tau) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m & L_{p_i^k}\big(\tau\nabla\mathbf{u} + (1-\tau)\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}, x\big)(\partial_i u^k - \partial_i \widetilde{u}^k) \\ & + \sum_{k=1}^m L_{z^k}\big(\tau\nabla\mathbf{u} + (1-\tau)\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}, x\big)(u^k - \widetilde{u}^k)\, dx \\ = \sum_{k=1}^m \int\limits_\Omega & \Big(\sum_{i=1}^n \partial_i\big(L_{p_i^k}\big(\tau\nabla\mathbf{u} + (1-\tau)\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}, x\big)\big) \\ & + L_{z^k}\big(\tau\nabla\mathbf{u} + (1-\tau)\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}, x\big)\Big)(u^k - \widetilde{u}^k)\, dx = 0\,, \end{aligned}$$

wobei wir partiell integriert haben, sowie (2.9) und den Fakt, dass $\tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}$ eine Lösung der Euler–Lagrange Gleichungen ist, benutzt haben. Somit ist j auf $[0,1]$ konstant und (2.10) folgt sofort. ■

Wir benötigen noch folgenden Begriff. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matix. Mit

$$\operatorname{cof} \mathbf{A}$$

bezeichnen wir die **Kofaktormatrix**, deren (k,i)–ter Eintrag aus der Determinante der $(n-1)\times(n-1)$ Matrix $\mathbf{A}_i^k$ besteht, die man durch streichen der k–ten Zeile und der i–ten Spalte erhält, d.h.

$$(\operatorname{cof} \mathbf{A})_i^k := (-1)^{i+k} \det \mathbf{A}_i^k\,.$$

2.11 Lemma. *Sei $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n \partial_i (\operatorname{cof} \nabla\mathbf{u})_i^k = 0\,, \qquad k = 1, \dots, n. \tag{2.12}$$

Beweis : Aus der linearen Algebra wissen wir, dass für Matrizen $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$(\det \mathbf{P})I = \mathbf{P}^T(\operatorname{cof} \mathbf{P}),$$

und somit für $i, j = 1, \ldots, n$

$$(\det \mathbf{P})\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} P_i^k (\operatorname{cof} \mathbf{P})_j^k . \tag{2.13}$$

Daraus folgt für $r, s = 1, \ldots, n$ (man wähle $j = i = s$ und nutze die Definition von $\operatorname{cof} \mathbf{P}$)

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial p_s^r} = (\operatorname{cof} \mathbf{P})_s^r \,. \tag{2.14}$$

Wenn man $\mathbf{P} = \nabla \mathbf{u}$ in (2.13) einsetzt, nach x_j differenziert und dann das Ergebnis über $j = 1, \ldots, n$ aufaddiert, erhält man unter Benutzung von (2.14) für $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{j,r,s=1}^{n} \delta_{ij} (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_s^r \partial_j \partial_s \, u^r = \sum_{r,j=1} \partial_j \partial_i \, u^r (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_j^r + \partial_i u^r \partial_j (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_j^r \,.$$

Dies kann man aber auch als

$$\sum_{r=1}^{n} \partial_i u^r \Big(\sum_{j=1}^{n} \partial_j (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_j^r \Big) = 0 \,, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.15}$$

schreiben, d.h. der Vektor $\big(\sum_{j=1}^{n} \partial_j (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_j^r \big)_{r=1,\ldots,n}$ ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$, mit $\mathbf{A} = \nabla \mathbf{u}$. In einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, für den $\det \nabla \mathbf{u}(x_0) \neq 0$ gilt, erhalten wir sofort

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u}(x_0))_j^r = 0 \,, \qquad r = 1, \ldots, n.$$

Falls allerdings $\det \nabla \mathbf{u}(x_0) = 0$ gilt, wählen wir $\varepsilon > 0$ so dass $\det(\nabla \mathbf{u}(x_0) + \varepsilon \mathbf{I}) \neq 0$ und führen die obigen Rechnungen für $\widetilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u} + \varepsilon x$ aus. Am Ende führen wir den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durch und die Behauptung folgt. ∎

2.16 Satz. *Die Determinante*

$$L(\mathbf{P}) = \det \mathbf{P}, \qquad P \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

ist eine Null–Lagrangefunktion.

Beweis : Wir müssen zeigen, dass für jede glatte Funktion $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i \big(L_{p_i^k} (\nabla \mathbf{u}) \big) = 0 \,, \qquad k = 1, \ldots, n \,.$$

Aus (2.14) wissen wir

$$L_{p_i^k}\big(\nabla \mathbf{u}\big) = (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_i^k\,, \qquad i,k = 1,\dots,n$$

und somit ist die Behauptung nichts anderes als Lemma 2.11. ■

Ein weiteres Beispiel für eine Null–Lagrangefunktion ist

$$L(\mathbf{P}) = \operatorname{tr}(\mathbf{P}^2) - (\operatorname{tr}(\mathbf{P}))^2\,.$$

Nun können wir den Brouwerschen Fixpunktsatz beweisen.

2.17 Satz (Brouwer, 1912). *Jede stetige Abbildung* $\mathbf{A}$ *einer abgeschlossenen Kugel des* $\mathbb{R}^n$ *in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis : Wir betrachten o.B.d.A die abgeschlossene Einheitskugel $B = \overline{B_1(0)}$.
1. Als erstes zeigen wir, dass es keine glatte Funktion

$$\mathbf{w} : B \to \partial B \tag{2.18}$$

gibt, so dass für alle $x \in \partial B$ gilt

$$\mathbf{w}(x) = x\,. \tag{2.19}$$

Nehmen wir an, eine solche Funktion $\mathbf{w}$ würde existieren. Sei $\widetilde{\mathbf{w}}$ die identische Funktion auf B, d.h. $\widetilde{\mathbf{w}}(x) = x$ für alle $x \in B$. Dann gilt $\widetilde{\mathbf{w}}(x) = \mathbf{w}(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$. Da die Determinante eine Null–Lagrangefunktion ist (Satz 2.16), liefert Satz 2.8

$$\int\limits_B \det \nabla \mathbf{w}\, dx = \int\limits_B \det \nabla \widetilde{\mathbf{w}}\, dx = |B| \neq 0\,, \tag{2.20}$$

da $\det \nabla \widetilde{\mathbf{w}} = 1$. Aus (2.18), (2.19) folgt, dass $\|\mathbf{w}\|^2 \equiv 1$ und somit erhalten wir durch Differentation

$$(\nabla \mathbf{w})^T \mathbf{w} = \mathbf{0}\,. \tag{2.21}$$

Da $\|\mathbf{w}\| = 1$ gilt, besagt (2.21), dass 0 ein Eigenwert von $(\nabla \mathbf{w}(x)^T$ für alle $x \in B$ ist. Somit haben wir $\det \nabla \mathbf{w}(x) = 0$ für alle $x \in B$, was ein Widerspruch zu (2.20). Damit ist die Behauptung bewiesen.
2. Als nächstes zeigen wir, dass es keine stetige Funktion $\mathbf{w}$ gibt, die (2.18), (2.19) erfüllt. Falls $\mathbf{w}$ eine solche Funktion wäre, setzen wir $\mathbf{w}$ durch $\mathbf{w}(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$, auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort. Somit ist $\mathbf{w}(x) \neq \mathbf{0}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Sei nun $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass für $\mathbf{w}_1 \equiv J_\varepsilon * \mathbf{w}$ immer noch $\mathbf{w}_1(x) \neq \mathbf{0}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Hierbei ist J_ε der Glättungsoperator (vgl. FA I). Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ und $\varepsilon > 0$ klein genug, dann gilt:

$$\mathbf{w}_1(x) = \int\limits_{B_\varepsilon(0)} J_\varepsilon(\|y\|)(x-y)\, dy = x\,,$$