da $\int\limits_{B_\varepsilon(0)} J_\varepsilon(\|y\|)\,dy = 1$ und $J_\varepsilon(\|y\|)$ eine radiale symmetrische Funktion ist. Dann würde aber die glatte Funktion

$$\mathbf{w}_2(x) = \frac{2\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$$

(2.18), (2.19) mit $B = B_2(0)$ erfüllen, was nach 1. nicht möglich ist.
3. Sei nun $\mathbf{A} : B \to B$ eine stetige Funktion, die keinen Fixpunkt besitzt. Wir definieren $\mathbf{w} : B \to \partial B$ dadurch, dass $\mathbf{w}(x)$ der Punkt auf ∂B ist, der von dem Strahl, der aus $\mathbf{A}(x)$ startet und durch x geht, getroffen wird. Diese Funktion ist wohl definiert, da $\mathbf{A}(x) \neq x$ für alle $x \in B$. Offensichtlich ist $\mathbf{w}$ stetig und erfüllt (2.18), (2.19). Dies ist ein Widerspruch zu 2. und der Satz ist bewiesen. ■

2.22 Folgerung. *Jede stetige Abbildung einer zur abgeschlossenen Kugel B homöomorphen Menge M in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis : Seien $\mathbf{T}\colon M \to M$ stetig und $\mathbf{h}\colon B \to M$ ein Homöomorphismus, d.h. $\mathbf{h}$ und $\mathbf{h}^{-1}$ sind stetig, eineindeutig und surjektiv. Die durch

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{h}\colon B \to B$$

definierte Abbildung ist stetig. Somit folgt nach dem Satz von Brouwer die Existenz eines Fixpunktes x_0 von $\mathbf{A}$, d.h.

$$\mathbf{A}x_0 = x_0.$$

Dies bedeutet aber, dass $\mathbf{h}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{h}(x_0) = x_0$ gilt. Durch Anwendung von $\mathbf{h}$ auf beiden Seiten dieser Gleichung erhalten wir

$$\mathbf{T}(\mathbf{h}(x_0)) = \mathbf{h}(x_0),$$

d.h. $\mathbf{h}(x_0)$ ist der gesuchte Fixpunkt von T. ■

• Beispiele von zur Kugel homöomorphen Mengen sind: konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$, einfach zusammenhängende Mengen im $\mathbb{R}^n$.

Nichtlineare Gleichungssysteme

Wir betrachten nun

$$g_i(x) = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, \dots, n, \tag{2.23}$$

wobei g_i stetige, nichtlineare Funktionen sind, die folgender Bedingung genügen:

$$\exists R > 0: \quad \sum_{i=1}^{n} g_i(x)x_i \geq 0 \qquad \forall x \text{ mit } \|x\| = R. \tag{2.24}$$

2.25 Folgerung. *Seien $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$, stetige Funktionen, die der Bedingung (2.24) genügen. Dann existiert eine Lösung x_0 von (2.23) mit $\|x_0\| \leq R$.*

Beweis : Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, (2.23) habe keine Lösung. Für $\mathbf{g} := (g_1, \ldots, g_n)$ definieren wir

$$f_i(x) = -R\,\frac{g_i(x)}{\|\mathbf{g}(x)\|} \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Da $\|\mathbf{g}(x)\| > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, ist $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ wohldefiniert und stetig und bildet die abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(0)}$ in sich selbst ab. Somit folgt mit dem Satz von Brouwer die Existenz eines Fixpunktes x_0 von $\mathbf{f}$, d.h.

$$x_0 = \mathbf{f}(x_0).$$

Daraus ergibt sich

$$\|x_0\| = R,$$

denn $\|x_0\| = \|f(x_0)\| = \| - R\frac{\mathbf{g}(x)}{\|\mathbf{g}(x)\|}\| = R$. Damit gilt nach Bedingung (2.24)

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_{i=1}^n g_i(x_0)(x_0)_i &= -\sum_{i=1}^n f_i(x_0)(x_0)_i \frac{\|\mathbf{g}(x_0)\|}{R} \\ &= -\|x_0\|^2 \frac{\|\mathbf{g}(x_0)\|}{R} = -R\|\mathbf{g}(x_0)\| < 0\,. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir einen Widerspruch, also muss es eine Lösung von (2.23) geben. ■

Sei X ein Banachraum mit Dualraum X^*. Sei ferner $T\colon K \subseteq X \to X^*$ ein Operator und $M \subseteq K \times X^*$. Wir suchen $u \in K$, so dass

$$\langle f - Tu, v - u\rangle_X \ge 0 \qquad \forall (v, f) \in M.$$

Dieses Problem tritt später bei der Untersuchung von „maximal monotonen Operatoren“ auf.

2.26 Satz. *Sei X ein Banachraum und sei $K \subseteq X$ eine konvexe, kompakte und nichtleere Teilmenge von X. Ferner sei $M \subseteq K \times X^*$ eine* ***monotone Teilmenge****, d.h.*

$$\langle f - g, v - w\rangle_X \ge 0\,, \qquad \forall (v, f), (w, g) \in M. \tag{2.27}$$

Falls $T\colon K \to X^*$ stetig ist, existiert eine Lösung $u \in K$ von

$$\langle f - Tu, v - u\rangle_X \ge 0\,, \qquad \forall (v, f) \in M\,. \tag{2.28}$$

Beispiel: Wir wählen: $K = [a, b], X = \mathbb{R} = X^*$, $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Der Graph von φ

$$M = \big\{\big(x, \varphi(x)\big) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x \in [a, b]\big\}$$

ist monoton, denn für alle $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$\big(\varphi(x) - \varphi(y)\big)(x - y) \ge 0.$$

Der Satz 2.26 besagt dann, dass für alle stetigen $T\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in [a, b]$ von

$$\big(\varphi(x) - Tu\big)(x - u) \ge 0$$

existiert. Als konkretes Beispiel kann man betrachten: $\varphi(x) = x + 2$, $T(x) = x^2$ und $[a, b] = [-3, 3]$ bzw. $[a, b] = [0, 3]$ bzw. $[a, b] = [3, 6]$.

BEWEIS (Satz 2.26): Angenommen, (2.28) habe keine Lösung.

1. Wir definieren für $v \in X, f \in X^*$

$$U(v, f) := \{u \in K \,|\, \langle f - Tu, v - u\rangle_X < 0\}.$$

Die Menge $U(v, f)$ ist offen, da $\langle f - Tu, v - u\rangle_X$ stetig von den Argumenten abhängt und T stetig ist. Da das Problem (2.28) nach Annahme keine Lösung hat, gilt:

$$K \subseteq \bigcup_{(v,f)\in M} U(v, f).$$

Da K kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung durch $U(v_i, f_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Somit gibt es eine *Zerlegung der Eins*, d.h. es existieren stetige Abbildungen $\beta_i \colon K \to \mathbb{R}$, $0 \le \beta_i(x) \le 1$, mit $\operatorname{supp} \beta_i \subseteq U(v_i, f_i)$, so dass für alle $u \in K$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i(u) = 1\,. \tag{2.29}$$

2. Sei K_1 die abgeschlossene konvexe Hülle der $v_i, i = 1, \ldots, m$, d.h. $K_1 = \overline{co(v_1, \ldots, v_m)}$. Für $u \in K_1$ definieren wir

$$\begin{aligned} p(u) &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i(u) v_i, \\ q(u) &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i(u) f_i. \end{aligned}$$

Die Abbildung $p \colon K_1 \to K_1$ ist stetig, $\dim K_1 < \infty$, und K_1 ist homöomorph zur Kugel. Nach Folgerung 2.22 folgt damit die Existenz eines Fixpunktes, d.h.

$$\exists\, u^* \in K_1 \qquad \text{mit} \qquad p(u^*) = u^*.$$

3. Wir setzen für $i, j = 1, \ldots, m$

$$\Delta_{ij} := \langle f_i - Tu^*, v_j - u^*\rangle_X\,.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} + \Delta_{ji} &= \langle f_i - Tu^*, v_j - u^*\rangle_X + \langle f_j - Tu^*, v_i - u^*\rangle_X \\ &= \langle f_i - Tu^*, v_i - u^*\rangle_X - \langle f_i - Tu^*, v_i\rangle_X \\ &\quad + \langle f_i - Tu^*, v_j\rangle_X + \langle f_j - Tu^*, v_j - u^*\rangle_X \\ &\quad - \langle f_j - Tu^*, v_j\rangle_X + \langle f_j - Tu^*, v_i\rangle_X \\ &= \Delta_{ii} + \Delta_{jj} + \langle f_i - f_j, v_j - v_i\rangle_X \\ &\le \Delta_{ii} + \Delta_{jj}\,, \end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei im letzten Schritt (2.27) benutzt wurde. Wegen $p(u^*) = u^*$, nach Definition von p und q, und wegen (2.29) gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle q(u^*) - Tu^*,\ p(u^*) - u^* \rangle_X \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^m \beta_i(u^*) f_i - Tu^*, \sum_{j=1}^m \beta_j(u^*) v_j - u^* \right\rangle_X \\ &= \sum_{i,j=1}^m \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)\Delta_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^m \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)\frac{1}{2}(\Delta_{ij} + \Delta_{ji}) \\ &\le \sum_{i,j=1}^m \beta_i(u^*)\beta_j(u^*)\frac{1}{2}(\Delta_{ii} + \Delta_{jj})\,, \end{aligned} \tag{2.31}$$

wobei die Symmetrie der Matrix mit den Einträgen $\beta_i(u^*)\beta_i(u^*)$ und (2.30) benutzt wurden. Falls für irgendwelche i, j gilt $\beta_i(u^*)\beta_j(u^*) > 0$, folgt aufgrund der Eigenschaften der Zerlegung der Eins:

$$u^* \in U(v_i, f_i) \cap U(v_j, f_j).$$

Nach Konstruktion von $U(v, f)$ muss dann gelten:

$$\Delta_{ii} < 0 \text{ und } \Delta_{jj} < 0.$$

Damit ergibt sich aus (2.31) der Widerspruch $0 < 0$. Also muss gelten

$$\beta_i(u^*) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Da aber $u^* \in K_1 \subseteq K$, gibt es aufgrund der Eigenschaften der Zerlegung der Eins ein i_0 mit $\beta_{i_0}(u^*) > 0$. Dies ist ein Widerspruch, also existiert eine Lösung des Problems (2.28). ∎

Kompakte Operatoren

Wenn wir den Satz von Brouwer auf unendlich–dimensionale Banachräume X übertragen wollen, erkennen wir folgendes Problem: Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$ ist in X nicht kompakt, was im $\mathbb{R}^n$ gilt und im Beweis des Satzes von Brouwer eine wichtige Rolle gespielt hat. Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass selbst in separablen Hilberträumen die Analogie von Satz 2.17 nicht gilt.

2.32 Satz (Kakutani, 1943). *Sei H ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum. Dann gibt es eine stetige Abbildung $f\colon H \to H$, die die abgeschlossene Einheitskugel in sich selbst abbildet und keinen Fixpunkt besitzt.*

Beweis : Wir schreiben wieder abkürzend $B = \overline{B_1(0)}$. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H, d.h. für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt: $(y_n, y_m) = \delta_{mn}$. Wir definieren die Abbildung U, indem wir die Wirkung auf die Basisvektoren angeben, d.h. wir setzen für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$U\colon H \to H\colon y_n \mapsto y_{n+1}\,.$$

Da jedes $x \in H$ bezüglich der Orthonormalbasis eine Darstellung

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i$$

besitzt, können wir die Abbildung U auf beliebige Elemente $x \in H$ erweitern:

$$U(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}\,. \tag{2.33}$$

Offensichtlich ist $U\colon H \to H$ stetig, und bildet die Menge $S_r = \{x \,|\, \|x\| = r\}$ in sich selbst ab, wie man mit Hilfe der Darstellung (2.33) einfach nachrechnen kann. Wir betrachten nun

$$f(x) := \frac{1}{2}\big(1 - \|x\|\big)y_0 + U(x).$$

Offensichtlich ist f stetig und bildet die Kugel B in sich selbst ab. In der Tat gilt für $\|x\| \le 1$:

$$\|f(x)\| \le \frac{1}{2}\big(1 - \|x\|\big)\|y_0\| + \|U(x)\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|x\| \le 1\,,$$

wobei $\|y_0\| = 1$ und $U\colon S_1 \to S_1$ benutzt wurden. Wir nehmen nun an, dass f in B einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein $x_0 \in B$ mit $f(x_0) = x_0$. Dies kann man auch schreiben als umgeschrieben

$$x_0 - U(x_0) = \frac{1}{2}\big(1 - \|x_0\|\big)\, y_0\,. \tag{2.34}$$

Für x_0 können folgende drei Fälle auftreten:
1. $x_0 = 0$. Dann folgt aus (2.34)

$$0 = \frac{1}{2}y_0,$$

was nicht möglich ist, da y_0 ein Basisvektor ist.
2. $\|x_0\| = 1$. Somit gilt $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i^2 = 1$ und wir erhalten aus (2.34)

$$x_0 = U(x_0),$$

was sich mit Hilfe von (2.33) umgeschrieben werden kann als:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}.$$

Wir bilden nun das Skalarprodukt mit y_j, $j \in \mathbb{Z}$ und erhalten aufgrund der Eigenschaften der Orthonormalbasis

$$\alpha_j = \alpha_{j-1} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}\,,$$

d.h. alle α_j sind gleich, und somit ergibt sich der Widerspruch

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j^2 = \infty \neq 1.$$

3. $0 < \|x_0\| < 1$. Sei $x_0 = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i y_i$, wobei $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i^2 < 1$ gelten muss. Dies eingesetzt im (2.34) ergibt aber:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (\alpha_i - \alpha_{i-1})\, y_i = \frac{1}{2}\big(1 - \|x_0\|\big)\, y_0\,,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \alpha_{-1} &= \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|) > 0, \\ \alpha_i &= \alpha_{i+1}\,, \qquad\qquad i \neq 0. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\ldots \alpha_{-2} = \alpha_{-1} < \alpha_0 = \alpha_1 \ldots,$$

womit $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i^2 = \infty$ und somit ein Widerspruch folgt.

In allen der drei möglichen Fälle tritt ein Widerspruch auf, d.h. die Annahme muss falsch sein. Also hat f keinen Fixpunkt. ∎

Aus diesem Gegenbeispiel lernen wir, dass in unendlich–dimensionalen Banachräumen stetige Abbildungen nicht unbedingt einen Fixpunkt haben müssen. Es ist also notwendig, stärkere Forderungen an die Abbildungen zu stellen. Dazu betrachten wir folgenden Ansatz: Wir untersuchen solche Operatoren, die durch „endlich-dimensionale“ Operatoren angenähert werden können, und versuchen, den Satz von Brouwer auf diese anzuwenden. Für eine genaue Umsetzung dieser Idee benötigen wir folgende

2.35 Definition. *Sei $T\colon M \subseteq X \to Y$, wobei X, Y normierte Vektorräume sind. Der Operator T heißt* ***kompakt****, wenn gilt:*

(i) *T ist stetig,*

(ii) *T bildet beschränkte Mengen $B \subseteq M$ in relativ kompakte Mengen ab, d.h. $\overline{T(B)}$ ist kompakt.*

Beispiel: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ein Integralkern. Dann ist der Integraloperator $A\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert durch

$$Au(x) := \int_\Omega K(x,y)u(y)\, dy$$

kompakt (vgl. FA I, Lemma 8.6).

Wir erinnern an die Definition einer kompakten Teilmenge M eines topologischen Raumes (X, τ). Die Menge M heißt **(überdeckungs–) kompakt** genau dann, wenn jede Überdeckung von M durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h.

$$M \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\, N, \alpha_1, \ldots, \alpha_N : \; M \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} O_{\alpha_i} \,.$$

Die Menge M heißt **relativ kompakt**, wenn $\overline{M}$ kompakt ist.
Die Menge M heißt **folgenkompakt** genau dann, wenn alle Folgen aus M eine in M konvergente Teilfolge besitzen, d.h.

$$\forall\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M \qquad \exists\, (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} : \; x_{n_k} \to x \in M \,.$$

Die Menge M eines metrischen Raumes (X, d) heißt **relativ folgenkompakt** genau dann, wenn alle Folgen (x_n) aus M eine in X konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit einem Grenzwert in X besitzen.
Die Menge M heißt **präkompakt** genau dann, wenn sie ein *endliches ε–Netz* besitzt, d.h. wenn sie sich für alle $\varepsilon > 0$ durch endlich viele ε–Bälle überdecken lässt, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, N = N(\varepsilon)\,, x_1, \ldots, x_N \in M : \quad M \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i) \,.$$

Wir haben folgende Resultate (vgl. Zeidler: Applied Functional Analysis):

2.36 Lemma. *In einem metrischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) *M ist (überdeckungs–) kompakt,*

(ii) *M ist folgenkompakt,*

(iii) *M ist präkompakt und vollständig.*

Weiterhin gilt:

(i) *M ist relativ kompakt genau dann, wenn M relativ folgenkompakt ist.*

(ii) *Wenn M relativ kompakt ist, dann ist M präkompakt. Die ungekehrte Implikation gilt, falls der metrische Raum vollständig ist.*

In endlich–dimensionalen Räumen gilt außerdem: M ist kompakt genau dann, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist. Im unendlich–dimensionalen Fall gilt nur die Implikation: Wenn M kompakt ist, dann ist M abgeschlossen und beschränkt.
Ein Operator $T \colon M \subseteq X \to Y$ ist kompakt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\dim Y < \infty$ und T ist stetig und beschränkt.

(ii) $\dim X < \infty$ und T ist stetig und M abgeschlossen.

2.37 Satz. *Seien X und Y Banachräume, $M \subseteq X$ eine nichtleere, beschränkte Teilmenge und $T \colon M \subseteq X \to Y$ ein Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist kompakt.*

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein kompakter Operator $P_n \colon M \to Y$, dessen Bildbereich $R(P_n)$ in einem endlich-dimensionalen Teilraum von Y liegt, mit*

$$\|P_n x - Tx\|_Y < \frac{1}{n}\,, \qquad \forall x \in M \,.$$

Beweis : (ii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen zunächst, dass T stetig ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|_Y &\leq \|Tx - P_n x\|_Y + \|P_n x - P_n y\|_Y + \|P_n y - Ty\|_Y \\ &\leq \frac{1}{n} + \|P_n x - P_n y\|_Y + \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{3}{n}\,. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Hierbei wurde benutzt, dass P_n für festes n stetig ist. Um die relative Kompaktheit von $T(M)$ nachzuweisen, zeigen wir die Existenz eines endlichen $\frac{3}{n}$–Netzes. Aus (2.38) folgt

$$\|Tx - Ty\|_Y \leq \frac{2}{n} + \|P_n x - P_n y\|_Y\,. \tag{2.39}$$

Da P_n kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_N \in M$ mit

$$P_n(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{n}}(P_n x_i)\,,$$

d.h. für alle $y \in M$ existiert ein $x_i, i \in \{1, \dots, N\}$, mit

$$\|P_n y - P_n x_i\|_Y \leq \frac{1}{n}\,.$$

Zusammen mit (2.39) ergibt sich daraus, dass für alle $y \in M$ ein $x_i \in M$ existiert mit

$$\|Tx_i - Ty\|_Y \leq \frac{3}{n}\,,$$

d.h. $T(M)$ besitzt ein endliches $\frac{3}{n}$–Netz. Also ist T kompakt.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei T kompakt und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Aufgrund der Kompaktheit von T ist $T(M)$ relativ kompakt, d.h.

$$\exists\, x_i \in M, i = 1, \dots, N: \qquad T(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{n}}(Tx_i)\,. \tag{2.40}$$

Wir setzen $y_i := Tx_i, i = 1, \dots, N$ und konstruieren eine *Zerlegung der Eins*. Für $i = 1, \dots, N$ definieren wir Funktionen a_i durch

$$a_i(x) := \max\left(\frac{1}{n} - \|Tx - y_i\|_Y\,, 0\right).$$

Die a_i, $i = 1, \dots, N$ haben folgende Eigenschaften:

(a) Jedes a_i ist stetig, denn T ist stetig und das Maximum zweier stetiger Funktionen ist stetig.

(b) $a_i(x) \geq 0$ nach Konstruktion.

(c) Für alle $x \in M$ gilt wegen der Überdeckungseigenschaft der y_i: $\sum_{i=1}^{N} a_i(x) > 0$.

(d) Nach Konstruktion impliziert $a_i(x) > 0$ die Ungleichung $\|Tx - y_i\|_Y < \frac{1}{n}$.

Wir definieren nun für $i = 1, \dots, N$

$$\lambda_i(x) := a_i(x) \left(\sum_{j=1}^{N} a_j(x) \right)^{-1} .$$

und erhalten, dass $\lambda_i, i = 1, \dots, N$ die gewünschte Zerlegung der Eins ist, denn es gilt:

(i) Jedes λ_i ist stetig nach (a) und (c).

(ii) $0 \le \lambda_i \le 1$ nach Konstruktion.

(iii) Für alle $x \in M$ gilt nach Konstruktion: $\sum\limits_{i=0}^{N} \lambda_i(x) = 1$.

(iv) Aus $\lambda_i(x) > 0$ folgt $\|Tx - y_i\|_Y < \frac{1}{n}$.

Nun definieren wir den sogenannten *Schauderoperator* $P_n \colon M \to M_n$, wobei $M_n = \overline{\mathrm{co}(y_1, \dots, y_N)} \subseteq \mathrm{span}(y_1, \dots, y_N)$, durch:

$$P_n(x) := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) y_i \,, \tag{2.41}$$

und zeigen, dass P_n die gewünschten Approximationseigenschaften hat. Aufgrund von (iii), (2.41) und (2.40) gilt:

$$\|P_n x - Tx\|_Y = \Big\|P_n x - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) Tx\Big\|_Y \le \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) \|y_i - Tx\|_Y \le \frac{1}{n} . \tag{2.42}$$

Nach Konstruktion gilt: $R(P_n) \subseteq \mathrm{span}(y_1, \dots, y_N)$, d.h. der Bildbereich von P_n liegt in einem endlich-dimensionalen Teilraum von Y. Die Menge $P_n(M)$ und somit auch $\overline{P_n(M)}$ ist beschränkt, denn mit Hilfe von (2.42) folgt

$$\|P_n x\| \le \|P_n x - Tx\| + \|Tx\| \le \frac{1}{n} + c \,,$$

da T kompakt ist und somit $T(M)$ beschränkt ist. Nach Konstruktion (2.41) von P_n und aufgrund von (i) ist P_n stetig. Der Bildraum $R(P_n)$ ist endlich-dimensional und die Menge $\overline{P_n(M)}$ ist beschränkt und abgeschlossen. Also ist $P_n(M)$ relativ kompakt. Insgesamt ist also P_n kompakt. ∎

Der Satz von Schauder

2.43 Satz. (Schauder, 1930) *Sei $T \colon M \subseteq X \to M$ stetig, wobei X ein Banachraum ist und M eine nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge ist. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

Beweis : Der Operator T ist kompakt, da $\overline{T(M)} \subseteq M$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst auch kompakt ist. Nach dem Beweis von Satz 2.37 existieren daher kompakte Operatoren $P_n \colon M \to M_n$, wobei $M_n = \overline{\mathrm{co}(y_1, \ldots, y_N)} \subseteq M$, $N = N(n)$, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\|P_n x - Tx\| \le \frac{1}{n}\,.$$

Setze

$$\widetilde{P}_n := P_n|_{M_n}\,.$$

Da M_n homöomorph zu $\overline{B_1(0)}$ im $\mathbb{R}^N$ ist, liefert Folgerung 2.22 die Existenz von $x_n \in M_n$ mit

$$\widetilde{P}_n x_n = x_n\,. \tag{2.44}$$

Für die Folge der Fixpunkte (x_n) gilt:

$$x_n \in M_n \subseteq M\,.$$

Da M kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit (x_n) bezeichnen, d.h. es existiert $x \in M$ mit

$$x_n \to x \in M\,.$$

Wir zeigen nun, dass dieses x der gesuchte Fixpunkt von T ist. Unter Benutzung von (2.44), der Stetigkeit von T und der Bedingung (ii) aus Satz 2.37 erhalten wir:

$$\|Tx - x_n\| = \|Tx - \widetilde{P}_n x_n\| \le \|Tx - Tx_n\| + \|Tx_n - \widetilde{P}_n x_n\| \le \frac{2}{n}\,.$$

Beim Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich

$$Tx = x\,,$$

d.h. x ist ein Fixpunkt von T. ■

Wir wollen noch eine alternative Version des Satzes von Schauder beweisen, die häufiger benutzt wird. In der Praxis ist es nämlich oft leichter, die Kompaktheit eines Operators zu zeigen als die Kompaktheit einer Teilmenge eines unendlich–dimensionalen Banachraumes. Dafür benötigen wir folgendes Lemma.

2.45 Lemma (Mazur). *Sei X ein Banachraum und A relativ kompakt. Dann ist auch $co(A)$ relativ kompakt.*

Beweis : Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Da A als relativ kompakt vorausgesetzt wurde, existieren

$$z_1, \ldots, z_n \in A \quad \text{so, dass} \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i).$$