Beweis : Der Operator T ist kompakt, da $\overline{T(M)} \subseteq M$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst auch kompakt ist. Nach dem Beweis von Satz 2.37 existieren daher kompakte Operatoren $P_n \colon M \to M_n$, wobei $M_n = \overline{\text{co}(y_1, \ldots, y_N)} \subseteq M$, $N = N(n)$, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\|P_n x - Tx\| \le \frac{1}{n}\,.$$

Setze

$$\widetilde{P}_n := P_n|_{M_n}\,.$$

Da M_n homöomorph zu $\overline{B_1(0)}$ im $\mathbb{R}^N$ ist, liefert Folgerung 2.22 die Existenz von $x_n \in M_n$ mit

$$\widetilde{P}_n x_n = x_n\,. \tag{2.44}$$

Für die Folge der Fixpunkte (x_n) gilt:

$$x_n \in M_n \subseteq M\,.$$

Da M kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit (x_n) bezeichnen, d.h. es existiert $x \in M$ mit

$$x_n \to x \in M\,.$$

Wir zeigen nun, dass dieses x der gesuchte Fixpunkt von T ist. Unter Benutzung von (2.44), der Stetigkeit von T und der Bedingung (ii) aus Satz 2.37 erhalten wir:

$$\|Tx - x_n\| = \|Tx - \widetilde{P}_n x_n\| \le \|Tx - Tx_n\| + \|Tx_n - \widetilde{P}_n x_n\| \le \frac{2}{n}\,.$$

Beim Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich

$$Tx = x\,,$$

d.h. x ist ein Fixpunkt von T. ■

Wir wollen noch eine alternative Version des Satzes von Schauder beweisen, die häufiger benutzt wird. In der Praxis ist es nämlich oft leichter, die Kompaktheit eines Operators zu zeigen als die Kompaktheit einer Teilmenge eines unendlich–dimensionalen Banachraumes. Dafür benötigen wir folgendes Lemma.

2.45 Lemma (Mazur). *Sei X ein Banachraum und $M \subseteq X$ relativ kompakt. Dann ist auch $co(M)$ relativ kompakt.*

Beweis : Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da M relativ kompakt ist, existiert ein endliches $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz, d.h. es existieren $z_1, \ldots, z_n \in M$, so dass für alle $x \in M$ ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ existiert mit

$$\|x - z_j\| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.46}$$

Dies erlaubt es uns, eine Funktion $v : M \to \{1, \ldots, n\}$ durch folgende Vorschrift zu definieren:

$$v(x) = j,$$

wobei j der kleinste Index ist für den (2.46) gilt. Nach Definition von $co(M)$ gibt es für alle $y \in co(M)$, $\alpha_i \in [0,1]$, $y_i \in M$ mit $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Aufgrund dieser Darstellung von $y \in co(M)$ und der Definition von v erhalten wir

$$\Big\| y - \sum_{i=1}^m \alpha_i z_{v(y_i)} \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^m \alpha_i (y_i - z_{v(y_i)}) \Big\| \le \sum_{i=1}^m \alpha_i \|y_i - z_{v(y_i)}\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $\sum_{i=1}^m \alpha_i z_{v(y_i)} \in K := co(z_1, \ldots, z_n)$gilt, haben wir gezeigt:

$$co(M) \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x), \tag{2.47}$$

Nun betrachten wir die Funktion

$$\psi : [0,1]^n \times \{z_1\} \times \ldots \times \{z_n\} \to X : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, z_1, \ldots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^m \alpha_i z_i \,,$$

die offensichtlich stetig ist. Weiter gilt mit $A = \big\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0,1]^n \,\big|\, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1\big\}$, dass $\psi(A \times \{z_1\} \times \ldots \times \{z_n\}) = K$. Somit ist k das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung, und also selbst kompakt , d.h.

$$\exists\, k_1, \ldots, k_N \in K : \quad K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{\frac{\varepsilon}{2}}(k_i). \tag{2.48}$$

Aus (2.47) und (2.48) folgt dann insgesamt

$$co(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\varepsilon(k_i),$$

d.h. $co(M)$ ist relativ kompakt. ∎

2.49 Folgerung (Schauder). *Sei $A\colon M \subseteq X \to M$ ein kompakter Operator, wobei X ein Banachraum ist, und M eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge von X ist. Dann besitzt A einen Fixpunkt.*

Beweis : Sei $N = \overline{co(A(M))} \subseteq M$. Wir überprüfen die Voraussetzungen von Satz 2.43. Nach Lemma 2.45 ist N kompakt, konvex und nichtleer. A ist stetig, denn A ist kompakt. Weiter bildet A die Menge N in sich selbst ab, denn es gilt:

$$N \subseteq M \quad \Rightarrow \quad A(N) \subseteq A(M) \quad \Rightarrow \quad A(N) \subseteq \overline{co(A(N))} \subseteq \overline{co(A(M))} = N\,.$$

Damit folgt nach Satz 2.43, dass A einen Fixpunkt besitzt. ∎

Anwendung auf Differentialgleichungen

Wir betrachten zuerst die gewöhnliche Differentialgleichung

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \qquad x(t_0) = y_0, \tag{2.50}$$

wobei $f\colon Q \to \mathbb{R}$ nur stetig ist, und nicht wie beim Satz von Picard-Lindelöf Lipschitz-stetig.

2.51 Satz (Peano, 1980). *Seien $t_0, y_0 \in \mathbb{R}, a, b > 0$ gegeben. Sei*

$$Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |t-t_0| \le a, |x-y_0| \le b\}\,,$$

und sei die Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem (2.50) eine stetig differenzierbare Lösung $x(t)$, die im Intervall $[t_0-c, t_0+c]$, mit $c = \min(a, \frac{K}{b})$, definiert ist. Hierbei ist K eine Konstante, so dass für alle $(t,x) \in Q$ gilt: $|f(t,x)| \le K$.

Beweis : Wir schreiben die Differentialgleichung in eine Integralgleichung um:

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds$$

und definieren den Operator A durch

$$Ax(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds.$$

Das Anfangswertproblem (2.50) ist äquivalent zu folgendem Fixpunktproblem:

$$x = Ax\,, \qquad\qquad x \in M \subseteq X\,,$$

mit

$$\begin{aligned} X &= C([t_0-c, t_0+c]; \mathbb{R}), \qquad \|x\|_X = \max_{t \in [t_0-c, t_0+c]} |x(t)|, \\ M &= \{x \in X \,\big|\, \|x-y_0\|_X \le b\}. \end{aligned}$$

Die Menge M ist nichtleer, konvex, abgeschlossen und beschränkt. Wie im Beweis vom Satz von Picard-Lindelöf folgt, dass der Operator A die Menge M in sich selbst abbildet. Es ist noch zu zeigen, dass A kompakt ist. Dabei verwenden wir den Satz von Arzela–Ascoli. Für alle $t \in [t_0-c, t_0+c]$ und $x \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} |Ax(t)| &\le |y_0| + \int_{t_0}^{t} \big|f(s, x(s))\big|\, ds \\ &\le |y_0| + c\,K \le c_0\,, \end{aligned}$$

d.h. $A(M)$ ist gleichmäßig beschränkt. Weiter gilt für alle $t_1, t_2 \in [t_0 - c, t_0 + c]$ und $x \in M$:

$$|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(s))| \, ds \leq K|t_2 - t_1|,$$

d.h. $A(M)$ ist gleichgradig stetig. Der Satz von Arzela-Ascoli liefert also, dass $A(M)$ relativ kompakt in $C([t_0 - c, t_0 + c])$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass A stetig ist: Konvergiere $x_n \to x$ bezüglich der Norm in X, d.h. x_n konvergiert gleichmäßig auf $[t_0 - c, t_0 + c]$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} |Ax_n(t) - Ax(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} \big|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\big| \, ds \\ &\leq 2c\,\varepsilon. \end{aligned}$$

da f stetig ist und $|t - t_0| < c$. Nach Folgerung 2.49 folgt dann: Es gibt einen Fixpunkt von A, d.h. eine Lösung von (2.50). Aus (2.50) folgt sofort, dass $x(t)$ stetig differenzierbar ist. ∎

Wir betrachten nun die nichtlineare partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) && \text{in}\, \Omega \\ u &= 0 && \text{auf}\, \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.52}$$

wobei Ω ein beschränktes glattes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ ist und $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

2.53 Satz. *Sei Ω ein beschränktes glattes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$ eine gegebene beschränkte Funktion. Dann besitzt das Problem (2.52) eine Lösung $u \in L^2(\Omega)$, d.h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:*

$$-\int_\Omega u \, \Delta\varphi \, dx = \int_\Omega f(u) \, \varphi \, dx \tag{2.54}$$

Beweis : Nach dem Satz von Lax–Milgram (**L.2.4.10, FA I**) besitzt das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta v &= g && \text{in}\, \Omega \\ v &= 0 && \text{auf}\, \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.55}$$

für alle $g \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ und der Lösungsoperator

$$B := (-\Delta)^{-1} \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \colon g \mapsto v \tag{2.56}$$

ist kompakt. In der Tat, aus der apriori Abschätzung

$$\|Bg\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} \leq c\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|g\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.57}$$

folgt einerseits, dass B stetig ist, das B linear und beschränkt ist und andererseits, dass B beschränkte Mengen in $L^2(\Omega)$ in beschränkte Mengen in $H_0^{1,2}(\Omega)$ abbildet. Die

Einbettung $H_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist nach dem Rellichschen Einbettungssatz kompakt, also ist B kompakt. Das Problem (2.52) ist äquivalent zum Fixpunktproblem

$$Au = u\,,$$

wobei $A\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert ist durch

$$Au := B\big(f(u)\big)$$

Der Operator A ist wohldefiniert, da auf Grund der Voraussetzungen an f für alle $u \in L^2(\Omega)$ gilt

$$\|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \le |\Omega|^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Dies und (2.57) liefern

$$\|Au\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} \le c\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \equiv c_1$$

Also bildet A die abgeschlossene Kugel $\overline{B_{c_1}(0)}$ des $L^2(\Omega)$ in die abgeschlossene Kugel $\overline{B_{c_1}(0)}$ des $H_0^{1,2}(\Omega)$ ab. Somit ist $R(A)$ relativ kompakt. Der Operator A ist auch stetig. Aus $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$ folgt für eine Teilfolge $u_{n_k}(x) \to u(x)$ fast überall in Ω. Da B linear ist erhalten wir daraus und unter Benutzung von (2.57)

$$\|Au_{n_k} - Au\|_{L^2(\Omega)} = \|B\big(f(u_{n_k}) - f(u)\big)\|_{L^2(\Omega)} \le c\|f(u_{n_k}) - f(u)\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen Null aufgrund des Satzes von der dominierten Konvergenz. Dies gilt für jede beliebige Teilfolge von (u_n) und somit auch für die gesamte Folge (vgl. Lemma 0.4). Insgesamt ist $A\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein kompakter Operator, der die abgeschlossene Kugel $\overline{B_{c_1}(0)}$ im $L^2(\Omega)$ in sich selbst abbildet. Folgerung 2.49 liefert also die Behauptung. ∎

Die Behauptung des Satzes kann leicht auf den Fall einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \le c(1 + |x|)$$

erweitert werden. Außerdem kann die Existenz einer Lösung $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ gezeigt werden, wenn man voraussetzt, dass f eine beschränkte $C^1(\mathbb{R})$–Funktion ist .

Kapitel 2

Integration und Differentiation in Banachräumen

Die Begriffe des *Integrals* und der *Ableitung* für Funktionen $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sind aus den Grundvorlesungen bekannt. Insbesondere sind das Lebesgue–Integral $\int\limits_\Omega f_j(x)\,dx$, die partielle Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ und das Differential $Df(x)$ bekannt. Wir möchten nun diese Begriffe auf Funktionen

$$f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to X\,,$$

erweitern, wobei X ein Banachraum ist. Im Prinzip ist das Vorgehen dabei sehr ähnlich, und wir werden auch ähnliche Sätze kennenlernen wie für reelle Funktionen, aber an manchen Stellen muß man aufpassen!

2.1 Bochner-Integrale

Der Einfachheit halber betrachten wir nur Funktionen

$$f\colon S \to X$$

mit eindimensionalem Definitionsbereich

$$S \subseteq \mathbb{R},$$

d.h. wir setzen $m = 1$ und beschränken uns auf den Fall, dass X ein reeller reflexiver Banachraum ist. Diese Voraussetzungen gelten für den gesamten Abschnitt.

1.1 Definition. *Eine Funktion $f\colon S \to X$ heißt **Treppenfunktion**, wenn sie sich schreiben läßt als*

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(s) x_i$$

wobei $x_i \in X$ und $B_i \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue-meßbare Mengen sind, für die gilt: $m(B_i) < \infty$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die charakteristische Funktion χ_B ist wie folgt definiert:

$$\chi_B(s) = \begin{cases} 0, & s \notin B, \\ 1, & s \in B\,. \end{cases}$$

1.2 Definition. *Sei f eine Treppenfunktion. Dann definieren wir das* ***Bochner-Integral*** *durch:*

$$\int_S f(s)\,ds \equiv \sum_{i=1}^{n} m(B_i)x_i.$$

Man beachte, dass das Bochner-Integral $\int_S f(s)\,ds$ ein Element des Banachraumes X ist.

1.3 Definition. *Eine Funktion $f\colon S \to X$ heißt* ***Bochner–messbar****, falls eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen $f_n\colon S \to X$ existiert, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(s) - f(s)\|_X = 0 \qquad \text{fast überall in } S. \tag{1.4}$$

Genügt eine solche Folge der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n(s) - f(s)\|_X \,ds = 0\,, \tag{1.5}$$

so heißt f ***Bochner–integrierbar****, und wir definieren das* ***Bochner–Integral*** *als*

$$\int_S f(s)\,ds \equiv \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(s)\,ds. \tag{1.6}$$

1.7 Lemma. *Wenn $f\colon S \to X$ Bochner–messbar ist, dann ist die Funktion $\|f(\cdot)\|\colon S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–messbar.*

Beweis : Sei $f\colon S \to X$ eine Bochner–messbare Funktion. Dann gibt es eine Folge $f_n\colon S \to X$ von Treppenfunktionen für die (1.4) gilt. Offensichtlich sind $\|f_n(\cdot)\|\colon S \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. Aufgrund von (1.4) haben wir für fast alle $s \in S$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(s)\| = \|f(s)\|,$$

d.h. die Funktion $\|f(\cdot)\|$ ist Lebesgue-messbar. ■

Dies angewendet auf $f_n - f$ stellt sicher, dass die Bedingung (1.5) Sinn macht.

• Der Grenzwert in (1.6) existiert.

Beweis : Wir haben für $n, k \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \int_S f_n\,ds - \int_S f_k\,ds \Big\| = \Big\| \int_S f_n - f_k\,ds \Big\| \le \int_S \|f_n - f_k\|\,ds,$$

da es sich um eine endliche Summe von Elementen aus X handelt. Also können wir die rechte Seite abschätzen durch

$$\int_S \|f_n - f\| + \|f - f_k\|\,ds \to 0 \qquad (n, k \to \infty)$$

aufgrund der Voraussetzung (1.5). Damit ist gezeigt, dass $\big(\int_S f_n\,ds\big)$ eine Cauchyfolge in X bildet. Wegen der Vollständigkeit von X folgt dann die Behauptung. ■

• Der Grenzwert ist außerdem von der gewählten Folge unabhängig, da zwei Folgen zu einer kombiniert werden können.

1.8 Satz (Pettis, 1938). *Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist $f\colon S \to X$ genau dann Bochner–messbar, wenn für alle $F \in X^*$ die Funktion $\langle F, f(\cdot)\rangle\colon S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–messbar ist.*

Beweis : 1. Sei f Bochner–messbar. Nach Definition gibt es dann eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen so, dass für fast alle $s \in S$ gilt:

$$f_n(s) \to f(s) \qquad \text{in } X.$$

Da starke Konvergenz in X schwache Konvergenz in X impliziert, folgt damit auch, dass für alle $F \in X^*$ gilt:

$$\langle F, f_n(s)\rangle \to \langle F, f(s)\rangle. \tag{1.9}$$

Offensichtlich sind $\langle F, f_n(s)\rangle\colon S \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. Was zusammen mit (1.9) impliziert, dass $\langle F, f(s)\rangle\colon S \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist.

2. Der Beweis dieser Richtung ist sehr technisch und kann in [12, S. 131] nachgelesen werden. ■

1.10 Folgerung. *Sei X ein separabler Banachraum. Ferner sei $f\colon S \to X$ eine Funktion und seien $f_n\colon S \to X, n \in \mathbb{N}$ Bochner–messbare Funktionen so, dass*

$$f_n(s) \rightharpoonup f(s) \qquad \text{für fast alle } \; s \in S\,. \tag{1.11}$$

Dann ist f Bochner–messbar.

Beweis : Nach Voraussetzung sind die f_n Bochner–messbar. Damit folgt aufgrund von Satz 1.8, dass für alle $F \in X^*$ gilt: $\langle F, f_n(\cdot)\rangle$ ist Lebesgue–messbar. Aus (1.11) folgt, dass für alle $F \in X^*$ und fast alle $s \in S$ gilt:

$$\langle F, f_n(s)\rangle \to \langle F, f(s)\rangle.$$

Somit ist auch der Grenzwert $\langle F, f(\cdot)\rangle$ Lebesgue–messbar. Nochmalige Anwendung von Satz 1.8 liefert dann, dass f Bochner–messbar ist. ■

1.12 Satz (Bochner, 1933). *Eine Bochner-messbare Funktion $f\colon S \to X$ ist genau dann Bochner–integrierbar, wenn die Funktion $\|f(\cdot)\|_X\colon S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–integrierbar ist.*

Beweis : 1. Sei $f\colon S \to X$ Bochner–integrierbar. Insbesondere ist f also Bochner–messbar, d.h. es gibt eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen, so dass für fast alle $s \in S$

$$f_n(s) \to f(s) \qquad \text{stark in } \; X. \tag{1.13}$$

Nach Lemma 1.7 ist $\|f_n(\cdot)\|: S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–messbar, was zusammen mit (1.13) liefert, dass auch $\|f(\cdot)\|$ Lebesgue–messbar ist. Wir haben folgende punktweise Abschätzung:

$$\|f(s)\| \leq \|f_n(s)\| + \|f(s) - f_n(s)\|,$$

und somit ergibt sich für das Integral die Abschätzung

$$\int\limits_S \|f\|\, ds \leq \int\limits_S \|f_{n_0}\|\, ds + \int\limits_S \|f - f_{n_0}\|\, ds < \infty.$$

wegen (1.5). Somit ist $\|f(\cdot)\|$ Lebesgue-integrierbar.

2. Sei f Bochner–messbar, d.h. es existiert eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen, so dass für fast alle $s \in S$ gilt:

$$f_n(s) \longrightarrow f(s) \quad \text{ in } X.$$

Wir definieren

$$g_n(s) := \begin{cases} f_n(s), & \|f_n(s)\| \leq \frac{3}{2}\|f(s)\|, \\ 0, & \|f_n(s)\| > \frac{3}{2}\|f(s)\|. \end{cases}$$

Offensichtlich sind auch die g_n Treppenfunktionen. Außerdem gilt

$$\|g_n(s) - f(s)\| \leq \|g_n(s) - f_n(s)\| + \|f_n(s) - f(s)\|,$$

woraus folgt, dass für fast alle $s \in S$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(s) - f(s)\| = 0.$$

Aufgrund der Konstruktion gilt:

$$\|g_n(s)\| \leq \frac{3}{2}\|f(s)\| \qquad \text{für fast alle} \quad s \in S.$$

Somit haben wir mit

$$\|g_n(s) - f(s)\| \leq \|g_n(s)\| + \|f(s)\| \leq \frac{5}{2}\|f(s)\|$$

eine Lebesgue–integrierbare Majorante für die Folge $(\|g_n(\cdot) - f(\cdot)\|)$ gefunden. Nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz folgt damit

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_s \|g_n(s) - f(s)\|\, ds = 0\,,$$

d.h. f ist Bochner–integrierbar. ■

1.14 Folgerung. *Sei $f : S \to X$ Bochner–integrierbar. Dann gilt:*

$$\Big\| \int_S f(s)\,ds \Big\|_X \le \int_S \|f(s)\|_X\,ds, \tag{1.15}$$

und für alle $F \in X^*$

$$\Big\langle F, \int_S f(s)\,ds \Big\rangle_X = \int_S \big\langle F, f(s) \big\rangle_X\,ds. \tag{1.16}$$

Beweis : 1. Nach Definition des Bochner–Integrals gilt für geeignete Treppenfunktionen (f_n):

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_S f(s)\,ds \Big\| &= \lim_{n\to\infty} \Big\| \int_S f_n(s)\,ds \Big\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n(s)\|\,ds \\
&\le \lim_{n\to\infty} \Big(\int_S \|f_n(s) - f(s)\|\,ds + \int_S \|f(s)\|\,ds \Big) \\
&= \int_S \|f(s)\|\,ds\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Definition des Integrals einer Treppenfunktion und (1.5) benutzt haben.
2. Nach dem Beweis von Satz 1.12 gibt es eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen, die fast überall gegen f konvergiert und für die gilt:

$$\|f_n(s)\| \le \tfrac{3}{2}\|f(s)\|\,. \tag{1.17}$$

Nach der Definition des Bochner–Integrals filt für alle $F \in X^*$

$$\begin{aligned}
\Big\langle F, \int_S f(s)\,ds \Big\rangle &= \lim_{n\to\infty} \Big\langle F, \int_S f_n(s) \Big\rangle\,ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_S \langle F, f_n(s) \rangle\,ds \\
&= \int_S \langle F, f(s) \rangle\,ds\,,
\end{aligned}$$

wobei im 2. Schritt benutzt wurde, dass das Integral von Treppenfunktionen eine endliche Linearkombination von Elementen aus X ist und F ein stetiges Funktional ist.[1] Im letzten Schritt wurde (1.17) und der Satz von der majorisierten Konvergenz von reellwertigen Funktionen benutzt. ∎

[1] Es gilt:

$$\langle F, \int_S f_n(s)\,ds \rangle = \langle F, \sum_{i=1}^N m(B_i) x_i \rangle = \sum_{i=1}^N m(B_i) \langle F, x_i \rangle = \int_S \langle F, f_n(s) \rangle_X\,ds.$$

- Sei I ein beschränktes Intervall. Für $f \in C(\bar{I}, X)$ existiert das Bochner–Integral nach Satz 1.12, da $\|f(\cdot)\| \colon \bar{I} \to \mathbb{R}$ Lebesgue–integrierbar ist. Es ergibt sich als Limes Riemannscher Summen:
$$\int_I f(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} f(\hat{t_j^n})(t_{j+1}^n - t_j^n)\,, \tag{1.18}$$
wobei $\hat{t_j^n} \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$. In der Tat, da f stetig ist, gilt offensichtlich für alle $s \in \bar{I}$:
$$f_n(s) := \sum_{j=0}^{n} f(\hat{t_j^n})\chi_{[t_j^n, t_{j+1}^n]} \to f(s) \qquad (n \to \infty)\,, \tag{1.19}$$
d.h. es existieren Treppenfunktionen (f_n), die gegen f konvergieren. Das Bochner–Integral dieser Treppenfunktionen ist offensichtlich die rechte Seite in (1.18). Da f auf $\bar{I}$ gleichmäßig stetig ist, ergibt sich sofort, dass $(\int_{\bar{I}} f_n(s)\,ds)$ eine Cauchyfolge ist und somit die Bedingung (1.5) erfüllt ist. Wir haben mit (1.19) auch gezeigt, dass Treppenfunktionen *dicht* im Raum der stetigen Funktionen liegen.

Das Bochner–Integral ist analog zum Lebesgue–Integral definiert. Man kann deshalb einen Großteil der Resultate für Lebesgue–Integrale auf Bochner–Integrale übertragen, wobei die obigen Sätze, die einen Zusammenhang zwischen Bochner– und Lebesgue–Integral herstellen, nützlich sind. Wir wollen dies an einigen Beispielen skizzieren.

L^p–Räume mit Werten in Banachräumen

1.20 Definition. *Wir bezeichnen mit*
$$L^p(S; X), \qquad 1 \le p < \infty,$$
die Menge aller Bochner–messbaren Funktionen, für die
$$\int_S \|f(s)\|_X^p\,ds < \infty\,.$$
Die Menge aller Bochner–messbaren Funktionen, für die eine Konstante M existiert, für die für fast alle $s \in S$ gilt:
$$\|f(s)\| \le M$$
bezeichnen wir mit $L^\infty(S; X)$.

1.21 Satz. *Die Menge $L^p(S; X), 1 \le p \le \infty$, bildet einen Banachraum bezüglich der Norm*
$$\|f\|_{L^p(S;X)} \equiv \left(\int_S \|f(s)\|_X^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$
bzw.
$$\|f\|_{L^\infty(S;X)} \equiv \operatorname*{ess\,sup}_S \|f(s)\|_X.$$

Beweis : Die Eigenschaften der Norm sind leicht nachzurechnen. Die Vollständigkeit der Räume $L^p(S;X)$ kann wie folgt auf die Vollständigkeit der Räume $L^p(S;\mathbb{R})$ zurückgeführt werden: Sei (f_n) eine Cauchy–Folge in $L^p(S;X)$, d.h.

$$\|f_n - f_k\|^p_{L^p(S;X)} = \int\limits_S \|f_n(s) - f_k(s)\|^p_X \, ds \to 0 \qquad (n,k \to \infty).$$

Also ist nach Satz 1.12 die Folge der Funktionen $\|f_n(\cdot) - f_k(\cdot)\|_X$ eine Cauchyfolge in $L^p(S;\mathbb{R})$. Ab hier kann man dem Beweis im Falle von $L^p(S;\mathbb{R})$ folgen (vgl **Alt, Lineare FA** oder **Gajewski, Gröger, Zacharias** ...). ■

1.22 Satz (Hölder–Ungleichung). *Sei $f \in L^p(S;X)$, $g \in L^{p'}(S;X^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann ist $\langle g(s), f(s)\rangle \in L^1(S)$, und es gilt*

$$\int\limits_S \langle g(s), f(s)\rangle_X \, ds \le \|g\|_{L^p(S;X^*)} \|f\|_{L^{p'}(S;X)} \,.$$

Beweis : Seien (f_n), (g_n) Folgen von Treppenfunktionen mit

$$f_n \to f \text{ in } X, \quad g_n \to g \text{ in } X^*, \qquad \text{fast überall in } S.$$

Dann ist wegen

$$\langle g_n(s), f_n(s)\rangle_X \to \langle g(s), f(s)\rangle_X \qquad \text{fast überall in} S$$

auch die Funktion $\langle g(s), f(s)\rangle_X$ Lebesgue–messbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_S \big\langle g(s), f(s)\big\rangle_X \, ds &\le \int\limits_S \|g(s)\|_{X^*} \|f(s)\|_X \, ds \\ &\le \|g\|_{L^p(S;X^*)} \|f\|_{L^{p'}(S;X)}\end{aligned}$$

nach der Hölder–Ungleichung für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. ■

1.23 Satz. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $1 < p < \infty$. Dann besitzt jedes Funktional $f \in (L^p(S;X))^*$ genau eine Darstellung der Form*

$$f(u) = \int\limits_S \langle v(s), u(s)\rangle_X \, ds \qquad \textit{für alle } u \in L^p(S;X)\,,$$

wobei $v \in L^{p'}(S;X^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Beweis : Der sehr technische Beweis verläuft analog zum Beweis im Falle von $f \colon S \to \mathbb{R}$ und liefert keine neuen Erkenntnisse, die über den Fall von reellwertigen Funktionen hinausgehen. Nachlesen kann man den Beweis z.B. in [8, Kap. 4]. ■

2.2 Differentiation von Funktionen mit Werten in Banachräumen

2.1 Definition. *Seien X, Y Banachräume, $f\colon X \to Y$ und $h \in X$, $x_0 \in X$ gegeben. Falls die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to Y$, definiert durch*

$$\varphi(t) := f(x_0 + th),$$

in $t = 0$ differenzierbar ist, d.h.

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} \in Y\,, \tag{2.2}$$

*sagen wir, dass f im Punkt x_0 eine **Ableitung in Richtung** h besitzt, die wir mit $\delta f(x_0, h)$ bezeichnen. Falls $\delta f(x_0, h)$ für alle $h \in X$ existiert und die Abbildung*

$$Df(x_0)\colon X \to Y : h \mapsto \delta f(x_0, h)$$

*stetig und linear ist, sagen wir, dass f im Punkt x_0 **Gâteaux–differenzierbar** ist.*

- Die Definition (2.1) stimmt im Fall von $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ mit der Definition von der Richtungsableitung überein. Insbesondere gilt im Falle $m = 1$

$$\delta f(x_0, e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

- Falls $\delta f(x_0, h)$ existiert, ist f im Punkt x_0 stetig in Richtung h, d.h.

$$\lim_{t\to 0} f(x_0 + th) = f(x_0).$$

- Indem wir die Bezeichnung $r(x) = o(\|x\|)$ einführen, können wir die Definition der Gâteaux–Ableitung umschreiben. Wir definieren:

$$r(x) = o(\|x\|) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} \to 0 \qquad \text{für } x \to 0.$$

  Damit schreibt sich die Definition 2.2 wie folgt:

$$f(x_0 + th) - f(x_0) = \varphi'(0)t + o(t).$$

- Falls $\delta f(x_0, h)$ existiert, dann gilt für alle $y^* \in Y^*$

$$\frac{d}{dt}\langle y^*, f(x_0+th)\rangle\Big|_{t=0} = \langle y^*, \delta f(x_0, h)\rangle.$$

2.3 Satz (Mittelwertsatz). *Seien X, Y Banachräume und sei $f\colon X \to Y$ für $0 \le t \le 1$ in $f(x_0 + th)$ Gâteaux-differenzierbar, und sei $t \mapsto \delta f(x_0 + th, h)$ stetig. Dann gilt:*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^1 \delta f(x_0 + th, h)\, dt\,.$$