Beweis : Seien $y^* \in Y^*$ und $h \in X$ gegeben. Wir definieren Funktionen $g\colon [0,1] \to Y$ und $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch:

$$g(t) = f(x_0 + th), \qquad h(t) = \langle y^*, g(t)\rangle_Y\,.$$

Nach Voraussetzung sind beide Funktionen nach t differenzierbar und es gilt:

$$g'(t) = \delta f(x_0 + th, h)\,, \qquad h'(t) = \langle y^*, g'(t)\rangle_Y.$$

Für h gilt nach dem Mittelwertsatz in $\mathbb{R}$

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)\,dt,$$

was wir unter Benutzung der Definitionen von h und g umschreiben können als

$$\begin{aligned}\langle y^*, f(x_0+h) - f(x_0)\rangle_Y &= \int_0^1 \big\langle y^*, \delta f(x_0 + th, h)\big\rangle_Y\,dt \\ &= \Big\langle y^*, \int_0^1 \delta f(x_0+th,h)\,dt\Big\rangle_Y\,,\end{aligned}$$

wobei wir (1.16) benutzt haben. Da $y^* \in Y^*$ beliebig war, folgt (vgl. **FA I**, Kap. **3, L. 4.20**)

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \int_0^1 \delta f(x_0+th,h)\,dt,$$

also die Behauptung. ■

2.4 Definition. *Seien X, Y Banachräume und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist f* ***Fréchet–differenzierbar*** *im Punkt $x_0 \in X$ genau dann, wenn eine stetige lineare Abbildung $A\colon X \to Y$ existiert, so dass*

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(\|h\|), \qquad h \to 0\,.$$

Wenn diese Abbildung existiert, nennen wir sie ***Fréchet–Ableitung*** *von f in x_0 und bezeichnen sie mit $f'(x_0) =: A$.*

- Die Funktion $f\colon X \to Y$ heißt **stetig differenzierbar** im Punkt x_0, falls die Abbildung $x \mapsto f'(x)$ im Punkt x_0 stetig ist. Wenn f in jedem Punkt einer Menge $U \subseteq X$ stetig differenzierbar ist, schreiben wir $f \in C^1(U;Y)$.

2.5 Satz. *Für $f\colon X \to Y$ gilt:*
(i) *Ist f im Punkt x_0 Fréchet-differenzierbar, dann ist f in x_0 Gâteaux-differenzierbar.*
(ii) *Ist f Gâteaux-differenzierbar in einer Umgebung $U(x_0)$, und ist $Df(x)$ stetig in x_0, dann ist f Fréchet-differenzierbar in x_0.*

Beweis : 1. Die Behauptung (i) folgt sofort, wenn wir in der Definition der Fréchet–Ableitung h als $t\tilde{h}$, $\tilde{h}$ fest aber beliebig, wählen und dann $t \to 0$ gehen lassen.

2. Für die Funktion $g(\tau) := f(x_0 + \tau h)$ erhalten wir

$$g'(\tau) = \delta f(x_0 + \tau h, h).$$

Nach dem Mittelwertsatz 2.3 ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\|g(1) - g(0) - g'(0)\| &= \Big\| \int_0^1 \delta f(x_0 + th, h) - \delta f(x_0, h)\, dt \Big\| \\
&\le \int_0^1 \big\| \big(Df(x_0 + th) - Df(x_0)\big) h \big\|\, dt \\
&\le \int_0^1 \big\| Df(x_0 + th) - Df(x_0) \big\|\, \|h\|\, dt \\
&= o(\|h\|)\,,
\end{aligned}$$

da Df stetig in x_0 ist. Also ist f im Punkt x_0 Fréchet–differenzierbar. ∎

Auch Ketten- und Produktregel gelten ähnlich wie im $\mathbb{R}^n$. Doch wir müssen zunächst einmal klären, was ein Produkt ist.

2.6 Definition. *Seien X, Y und W Banachräume. Eine Abbildung $B\colon X \times Y \to W$ nennen wir **Produkt**, wenn B folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) *B ist bilinear, d.h. linear in beiden Komponenten,*

(ii) *B ist stetig, d.h. es existiert eine Konstante c, so dass für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$ gilt:*

$$\|B(x,y)\|_W \le c\|x\|_X \|y\|_Y\,.$$

2.7 Satz (Ketten– und Produktregel). *Seien X, Y, W, Z Banachräume.*
(i) *Seien $U \subseteq X, V \subseteq Y$ offene Mengen und seien $f \in C^1(U;Y)$, $g \in C^1(V;Z)$ und sei $f(U) \subseteq V$. Dann ist $g \circ f \in C^1(U;Z)$, und es gilt:*

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \circ f'(x).$$

(ii) *Sei $U \subseteq X$ offen. Die Funktionen $f\colon U \to Y$ und $g\colon U \to Z$ seien in U Fréchet–differenzierbar und $B\colon Y \times Z \to W$ sei ein Produkt. Dann ist die Funktion $h\colon U \to W\colon x \mapsto B(f(x), g(x))$ Fréchet–differenzierbar, und es gilt für alle $y \in X$*

$$h'(x)y = B(f'(x)y, g(x)) + B(f(x), g'(x)y).$$

Beweis : 1. Nach Voraussetzung ist g in $y := f(x)$ Fréchet–differenzierbar, d.h.

$$g(y + k) = g(y) + g'(y)k + \|k\| r_1(k),$$

wobei $r_1(k) \to 0$ für $k \to 0$. Wir wählen

$$k = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \|h\| r_2(h),$$

wobei $r_2(h) \to 0$ für $h \to 0$, was aufgrund der Fréchet-Differenzierbarkeit von f in x gilt. Insgesamt erhalten wir dann

$$g(f(x+h)) = g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + \|h\| r(h),$$

wobei für $\|h\| r(h) := g'(f(x))\|h\| r_2(h) + \big\| f'(x)h + \|h\| r_2(h) \big\| r_1(k)$ gilt

$$\big\| \|h\| r(h) \big\| \le \|h\| \big\| g'(f(x)) r_2(h) + \|f'(x) + r_2(h)\| r_1(k) \big\| .$$

Unter Beachtung von $k(h) \to 0$ für $h \to 0$ und $r_1(k) \to 0$ für $k \to 0$ sowie $r_2(h) \to 0$ für $h \to 0$ erhalten wir $r(h) \to 0$ für $h \to 0$. Somit ist die Kettenregel bewiesen.

2. Sei $y \in X$. Dann gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f'(x)y + \|y\| r_1(y)\,, \\ g(x+y) &= g(x) + g'(x)y + \|y\| r_2(y)\,, \end{aligned}$$

wobei $r_1(y) \to 0$, $r_2(y) \to 0$ für $y \to 0$. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} h(x+y) - h(x) &= B(f(x+y), g(x+y)) - B(f(x), g(x)) \\ &= B\big(f(x) + f'(x)y + \|y\| r_1(y), g(x) + g'(x)y + \|y\| r_2(y)\big) \\ &\quad - B(f(x), g(x)) \\ &= B(f(x), g'(x)y) + B(f(x), r_2(y))\|y\| \\ &\quad + B(f'(x)y, g(x)) + B\big(f'(x)y, g'(x)y + \|y\| r_2(y)\big) \\ &\quad + \|y\| B\big(r_1(y), g(x) + g'(x)y + \|y\| r_2(y)\big) \\ &=: B\big(f(x), g'(x)y\big) + B\big(f'(x)y, g(x)\big) + \|y\|\, r(y)\,, \end{aligned}$$

wobei die Bilinearität von B benutzt wurde. Aufgrund der Stetigkeit von B erhalten wir $r(y) \to 0$ für $y \to 0$. Es gilt z.B.

$$\|B\big(f'(x)y, r_2(y)\big)\| \le c\|y\|\ \|f'(x)\|\ \|r_2(y)\| \to 0 \qquad \text{für } y \to 0.$$

■

- **Ableitungen höherer Ordnung:** Für eine Funktion $f\colon D(f) \subseteq X \to Y$ haben wir

  $$f'\colon D(f') \subseteq X \to L(X,Y).$$

  Höhere Ableitungen erhalten wir analog zu dieser Definition, indem wir sie weiter iterieren, z.B. ist f'' dann eine Abbildung

  $$f''\colon D(f'') \subseteq X \to L(X, L(X,Y)).$$

Wir sehen, dass die Bildräume der Ableitungen eine immer kompliziertere Struktur annehmen. Im weiteren benutzen wir folgende Notation:

$$f^{(n)}\colon X \times \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{–mal}} \to Y : (x, h_1, \ldots, h_n) \mapsto f^{(n)}(x, h_1, \ldots, h_n).$$

Wenn $h_i = h$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist, dann schreiben wir

$$f^{(n)}(x)h^n := f^{(n)}(x, \underbrace{h, \ldots, h}_{n\text{–mal}}).$$

- **Partielle Ableitungen:** Seien X, Y und Z Banachräume. Wir betrachten eine Funktion

$$f\colon X \times Y \to Z : (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Wenn wir $y_0 \in Y$ festhalten, ist $F(\cdot) := f(\cdot, y_0)\colon X \to Z$ eine Funktion in einer Variablen $x \in X$. **Die partielle Ableitung von f nach x** ist dann analog zu den partiellen Ableitungen von Funktionen im $\mathbb{R}^n$ definiert:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \equiv F'(x_0).$$

Analog kann man $x_0 \in X$ festhalten und mit Hilfe von $G(\cdot) := f(x_0, \cdot)\colon Y \to Z$ die partielle Ableitung von f nach y definieren:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \equiv G'(y_0).$$

2.8 Satz (Taylor). *Sei $U \subseteq X$ offen, $f \in C^n(U; Y)$ und $x \in U$. Ferner existiere $f^{(n+1)}(x + th)$ für festes $h \in X$ und für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt:*

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n + R_{n+1}(x, h),$$

wobei $\|R_{n+1}(x, h)\| \le \sup\limits_{\tau \in [0,1]} \|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \tau h)h^{n+1}\|$.

Beweis : Für $y^* \in Y^*$ setzen wir $g(t) = \langle y^*, f(x + th)\rangle\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Der Satz von Taylor in $\mathbb{R}$ liefert für ein $t_1 \in [0, 1]$

$$\langle y^*, f(x+th)\rangle = \left\langle y^*, f(x)+f'(x)h+\ldots+\frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+t_1 h)h^{n+1} \right\rangle.$$

Mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach folgt daraus die Behauptung. ∎

Satz über implizite Funktionen

Unser Ziel ist es, eine Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen, den wir für reellwertige Funktionen kennen, zu beweisen.
Sei $F\colon X \times Y \to Z$. Wir wollen die Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$ lösen, wobei $F(x_0, y_0) = 0$ gegeben ist, d.h. wir suchen eine Abbildung

$$y\colon x \mapsto y(x)$$

mit $F(x, y(x)) = 0$ und $y(x_0) = y_0$.

2.9 Satz (Satz über implizite Funktionen, Hildebrandt, Graves 1927). *Seien X, Y und Z Banachräume, $U(x_0, y_0) \subseteq X \times Y$ eine offene Umgebung von (x_0, y_0), $F\colon X \times Y \to Z$ sei in $U(x_0, y_0)$ definiert, und es sei $F(x_0, y_0) = 0$. Ferner existiere $\frac{\partial F}{\partial y}$ als Fréchet–Ableitung in $U(x_0, y_0)$, und es sei $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\colon Y \to Z$ bijektiv. Außerdem seien F und $\frac{\partial F}{\partial y}$ in (x_0, y_0) stetig. Dann existieren $r_0, r > 0$ so, dass gilt:*
Für alle $x \in X$ mit $\|x - x_0\| \le r_0$ existiert genau ein $y(x) \in Y$ mit

$$\|y(x) - y_0\| \le r \quad \text{und} \quad F(x, y(x)) = 0\,.$$

Beweis : O.B.d.A. seien $x_0 = y_0 = 0$. Wir setzen

$$g(x,y) := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)y - F(x,y).$$

Dann ist die Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ äquivalent zu folgender Gleichung:

$$y = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right)^{-1} g(x,y) =: T_x y.$$

Für alle $\|x\| \le r_0$ und $\|y\|, \|z\| \le r$ gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x,y),$$

insbesondere gilt also:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Da F und $\frac{\partial F}{\partial y}$ stetig in $(0,0)$ sind, folgt mit der Taylor–Formel für $n = 0$ und $h = y - z$:

$$\begin{aligned} \|g(x,y) - g(x,z)\| &\le \sup_{0<\tau<1} \left\| \frac{\partial g}{\partial y}(x, z + \tau(y-z)) \right\| \, \|y - z\| \\ &= o(1)\|y - z\|, \qquad\qquad r \to 0, r_0 \to 0\,. \end{aligned}$$

Da $g(0,0) = 0$ und g stetig in $(0,0)$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \|g(x,y)\| &\le \|g(x,y) - g(x,0)\| + \|g(x,0)\| \\ &= o(1)\|y\| + o(1)\,, \qquad\qquad r \to 0, r_0 \to 0\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Wir setzen $M := \{y \in Y \,|\, \|y\| \le r\}$. Aus (2.10) erhalten wir für alle $y \in M$ und alle $x \in \overline{B_{r_0}(0)} = \{x \in X \,|\, \|x\| \le r_0\}$

$$
\begin{aligned}
\|T_x y\| &\le \left\| \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \Big)^{-1} \right\| \; \|g(x,y)\| \\
&\le K\big(o(1)\|y\| + o(1)\big) \\
&\le r\,,
\end{aligned}
$$

falls r_0 und r klein genug gewählt wurden. Deshalb bildet T_x die Menge M in sich selbst ab, d.h. es gilt für alle $x \in \overline{B_{r_0}(0)}$:

$$
T_x \colon M \to M\,.
$$

Weiter gilt für T_x:

$$
\begin{aligned}
\|T_x y - T_x z\| &\le \left\| \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \Big)^{-1} \right\| \; \|g(x,y) - g(x,z)\| \\
&\le K o(1) \|y - z\| \\
&\le \frac{1}{2}\|y - z\|,
\end{aligned}
$$

wobei wir r eventuell noch kleiner als oben wählen. Wir haben also gezeigt, dass T_x k–kontraktiv ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gilt dann für alle $x \in X$ mit $\|x\| \le r_0$

$$
\exists\, !\, y \in Y \text{ mit } \|y\| \le r : \quad y = T_x y.
$$

Dies ist äquivalent dazu, dass die Gleichung

$$
F(x, y(x)) = 0
$$

eine eindeutige Lösung $y(x) \in Y$ besitzt. ∎

2.11 Folgerung. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 2.9 sei F im Punkt (x_0, y_0) Fréchet–differenzierbar. Dann ist $y = y(x)$ in x_0 Fréchet–differenzierbar, und es gilt:*

$$
y'(x_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\,.
$$

Beweis : Nach Voraussetzung ist F in (x_0, y_0) Fréchet–differenzierbar, d.h.

$$
\begin{aligned}
F(x,y) = F(x_0,y_0) &+ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) \\
&+ o(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|).
\end{aligned}
$$

Für $y = y(x)$ ergibt sich wegen $F(x_0, y_0) = 0$ und $F(x, y(x)) = 0$:

$$
0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y(x) - y_0) + o(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|).
$$