– S ist abgeschlossen: Für eine Folge $(u_n) \subseteq S$, d.h. $Au_n = b$, mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, und für alle $v \in X$ haben wir:

$$\begin{aligned}\langle b - Av, u - v\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle b - Av, u_n - v\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0\end{aligned}$$

aufgrund der Monotonie von A. Aus Lemma 0.3 (i) folgt $Au = b$, also $u \in S$.

5. Eindeutigkeit: A sei strikt monoton. Falls es zwei Lösungen $u \neq v$ von (1.6) gibt, dann haben wir einerseits $Au = b = Av$ und andererseits folgt aufgrund der strikten Monotonie von A

$$0 < \langle Au - Av, u - v\rangle = \langle b - b, u - v\rangle = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also kann die Gleichung höchstens eine Lösung haben. ■

1.17 Folgerung. *Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum und sei $A\colon X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver und hemistetiger Operator. Dann existiert der Operator $A^{-1}\colon X^* \to X$ und ist strikt monoton und demistetig.*

Beweis : Übung. ■

Der Nemyckii-Operator

Um Satz 1.5 auf Differentialgleichungen anwenden zu können, benötigen wir den sogenannten **Nemyckii–Operator**

$$(F\boldsymbol{u})(x) := f(x, \boldsymbol{u}(x))\,, \tag{1.18}$$

wobei $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\boldsymbol{u}\colon G \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$, mit einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^N$. Bezüglich $f\colon G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ machen wir folgende Annahmen:

(i) *Carathéodory–Bedingung*:

$$\begin{aligned} &f(\cdot, \boldsymbol{\eta})\colon x \mapsto f(x, \boldsymbol{\eta}) && \text{ist messbar auf } G \text{ für alle } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n, \\ &f(x, \cdot)\colon \boldsymbol{\eta} \mapsto f(x, \boldsymbol{\eta}) && \text{ist stetig auf } \mathbb{R}^n \text{ für fast alle } x \in G.\end{aligned}$$

(ii) *Wachstumsbedingung*:

$$|f(x, \boldsymbol{\eta})| \leq |a(x)| + b \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^{p_i/q}.$$

Wobei $b > 0$ eine feste Zahl ist und $a \in L^q(G)$, $1 \leq p_i, q < \infty$, $i = 1, \ldots, n$.

1.19 Lemma. *Unter den obigen Annahmen an f und das Gebiet G, ist der in (1.18) definierte Nemyckii–Operator*

$$F\colon \prod_{i=1}^{n} L^{p_i}(G) \to L^q(G)$$

stetig und beschränkt. Es gilt für alle $\boldsymbol{u} \in \prod_{i=1}^{n} L^{p_i}(G)$ die Abschätzung

$$\|F\boldsymbol{u}\|_{L^q(G)} \le c\Big(\|a\|_{L^q(G)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_i}(G)}^{p_i/q}\Big). \tag{1.20}$$

Beweis : Wir betrachten nur den Fall $n = 1, u = u_1, p = p_1$. Der allgemeine Fall folgt analog.

1. Messbarkeit von Fu: Da $u \in L^p(G)$, ist die Funktion $x \mapsto u(x)$ messbar auf G. Also gibt es eine Folge (u_n) von Treppenfunktionen mit

$$u_n \to u \qquad \text{fast überall in } G.$$

Daher gilt für fast alle $x \in G$

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x, u_n(x)),$$

da f nach Annahme (i) stetig in $\boldsymbol{\eta}$ ist. Da u_n Treppenfunktionen sind haben wir

$$f(x, u_n(x)) = f\Big(x, \sum_{j=0}^{M} c_j \chi_{G_j}(x)\Big) = \sum_{j=1}^{M} f(x, c_j)\chi_{G_j}(x),$$

mit $c_0 = 0$ und $G_0 = G \setminus \bigcup_{i=1}^{M} G_i$. Somit ist $f(x, u_n(x))$ messbar, da $f(x, c_j)$ messbar ist, und die χ_{G_j} als charakteristische Funktionen messbar sind. Weiterhin ist der Limes messbarer Funktionen messbar und demnach auch Fu.

2. Beschränktheit von F: Es gilt für alle $u \in L^p(G)$

$$\begin{aligned}
\|Fu\|_{L^q(G)}^q &= \int_G \big|f(x, u(x))\big|^q \, dx \\
&\le \int_G \big(|a(x)| + b|u(x)|^{p/q}\big)^q \, dx \\
&\le c\int_G |a(x)|^q + b^q|u(x)|^p \, dx = c\big(\|a\|_{L^q(G)}^q + \|u\|_{L^p(G)}^p\big),
\end{aligned}$$

wobei die Wachstumsbedingung (ii) benutzt wurde und folgende Ungleichung, die für $1 < r < \infty$, $\xi_1, \dots, \xi_M \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{M} \xi_i\right)^r \le C \sum_{i=1}^{M} \xi_i^r \,. \tag{1.21}$$

In der Tat ist (1.21) nichts anderes ist als die Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^M$. Also ist F beschränkt und erfüllt die Abschätzung (1.20), denn $\|a\|_{L^q}$ und $\|u\|_{L^p}$ sind endlich nach den Voraussetzungen an a und u.

3. Stetigkeit von $F\colon L^p \to L^q$: Sei (u_n) eine Folge mit $u_n \to u$ in $L^p(G)$ $(n \to \infty)$. Demzufolge gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \to u$ fast überall in G und es gilt

$$\begin{aligned}|f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^q &\le C\big(|f(x, u_{n_k}(x))|^q + |f(x, u(x))|^q\big)\\ &\le C\big(|a(x)|^q + b^q|u_{n_k}(x)|^p + |f(x, u(x))|^q\big)\\ &=: h_{n_k}(x),\end{aligned}$$

wobei die Annahme (ii) benutzt wurden. Nach Integration über G folgt

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|^q_{L^q(G)} \le \int_G h_{n_k}\, dx.$$

Auf der rechten Seite der Ungleichung stehen als Integranden eine Folge von Funktionen h_{n_k} aus $L^1(G)$ mit

$$\begin{aligned} h_{n_k}(x) &\to h(x) &&\text{fast überall in } G \quad (k \to \infty),\\ \int_G h_{n_k}(x)\, dx &\to \int_G h(x)\, dx && (k \to \infty),\end{aligned}$$

da $u_n \to u$ in $L^p(G)$, also $\|u_n\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$. Außerdem gilt $(Fu_{n_k})(x) \to (Fu)(x)$ für fast alle $x \in G$, da f stetig in $\boldsymbol{\eta}$ ist (Annahme (i)). Daher ist der verallgemeinerte Satz von der dominanten Konvergenz anwendbar (Satz 1.22), demzufolge

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|^q_{L^q} \to 0.$$

Das Konvergenzprinzip Lemma **??** (iii) liefert nun $Fu_n \to Fu$ in $L^q(G)$, da die Argumentation für jede beliebige konvergente Teilfolge gilt. ■

1.22 Satz (Verallgemeinerung des Satzes von der dominanten Konvergenz). *Seien f_n und h_n seien Folgen aus $L^1(\mathbb{R}^N)$, die punktweise fast überall gegen f bzw. h, ebenfalls aus $L^1(\mathbb{R}^N)$, konvergieren. Weiterhin gelte $|f_n| \le h_n$ und*

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_n\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} h\, dx \qquad (n \to \infty).$$

Dann folgt

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f|\, dx \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Beweis : Übung ■

Quasilineare elliptische Gleichungen

Als Anwendung des Satzes von Browder und Minty und des Nemyckii–Operators betrachten wir das Randwertproblem für folgende quasilineare elliptische Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + su = f \qquad & \text{auf } \Omega\,, \\ u = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Dabei sei $1 < p < \infty$, Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $s \geq 0$. Der kanonische Raum X für die Untersuchung von (1.23) ist der Sobolevraum $W_0^{1,p}(\Omega)$. Die schwache Formulierung von Problem (1.23) lautet: Für gegebenes $f \in (L^p(\Omega))^*$ suchen wir $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi + su\varphi\,dx = \int\limits_\Omega f\varphi\,dx\,, \qquad \forall\varphi \in X. \tag{1.24}$$

Deshalb definieren wir einen Operator A durch

$$\langle Au, \varphi\rangle \equiv \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + su\varphi\,dx, \qquad \forall\, u, \varphi \in X, \tag{1.25}$$

und ein Funktional b durch

$$\langle b, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega f\varphi\,dx, \qquad \forall\, \varphi \in X\,. \tag{1.26}$$

Hierbei steht $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für das Dualitätsprodukt in X.

1.27 Lemma. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. Ferner sei $f \in L^{p'}(\Omega), p' = \frac{p}{p-1}$, $p > 1$ und $s \geq 0$. Für $p \geq \frac{2n}{n+2}$ bildet der Operator A definiert in (1.25) den Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ in seinen Dualraum ab, d.h. $A\colon X \to X^*$ und das Funktional b definiert in (1.26) gehört zu X^*. Ferner ist die schwache Formulierung (1.24) äquivalent zur Operatorgleichung in X^**

$$Au = b\,. \tag{1.28}$$

Beweis : Wir setzen $X := W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\|u\|_X := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. Aufgrund der „Nullrandbedingungen“ ist die übliche $W_0^{1,p}(\Omega)$–Norm, $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \Big(\int\limits_\Omega |u|^p + |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$, äquivalent zur $\|\nabla u\|_{L^p}$–Norm (vgl. [1, Theorem 6.28, S. 159]).

1. $A : X \to X^*$: Es gilt für $u, \varphi \in X$

$$
\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi\rangle| &\le \int_\Omega \big||\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi + su\varphi\big|\,dx \\
&\le \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dx + \int_\Omega s|u\varphi|\,dx \\
&\le \Big(\int_\Omega |\nabla u|^{p'(p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + s\Big[\Big(\int_\Omega |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \\
&= \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2},
\end{aligned}
$$

wobei wir die Hölderungleichung und $p' = \frac{p}{p-1}$ benutzt haben. Für $1 \le p < n$ gilt die Einbettung $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ mit $q \le \frac{np}{n-p}$. Insbesondere gilt also $X \hookrightarrow L^2(\Omega)$, falls $2 \le \frac{np}{n-p} \Leftrightarrow p \ge \frac{2n}{n+2}$. Falls $p \ge n$ ist, verwenden wir die Einbettungen $X \hookrightarrow W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $q < \infty$. Also erhalten wir, dass für $p \ge \frac{2n}{n+2}$ und alle $v \in X$ gilt:

$$\|v\|_{L^2} \le C_1\|v\|_X \le C_2\|\nabla v\|_{L^p}.$$

Insgesamt ergibt sich daher

$$
\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi\rangle| &\le \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla\varphi\|_{L_p} + s\|u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\
&\le C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p})\|\nabla\varphi\|_{L^p}\,.
\end{aligned}
$$

Aus der Definition der Norm von Au in X^* ergibt sich:

$$\|Au\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle Au, \varphi\rangle| \le C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p}),$$

und somit ist $Au \in X^*$ sowie $A\colon X \to X^*$, sofern $p \ge \frac{2n}{n+2}$.

2. Mit Hilfe der Hölderungleichung und der Definition der dualen Norm ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\|b\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle b, \varphi\rangle| &\le \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} \|f\|_{L^{p'}}\|\varphi\|_{L^p} \\
&\le C\|f\|_{L^{p'}},
\end{aligned}
$$

da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, d.h. $\|\varphi\|_{L^p} \le C\|\varphi\|_X$.

3. Aus 1., 2. und den Definitionen von A und b folgt, dass die schwache Formulierung von (1.24) gerade

$$\langle Au, \varphi\rangle = \langle b, \varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in X$$

ist. Dies ist aber die Operatorgleichung $Au = b$ in X^*. ■

- Im Falle $s = 0$ ist im vorherigen Lemma die Einschränkung $p \ge \frac{2n}{n+2}$ nicht nötig.