1. $A : X \to X^*$: Es gilt für $u, \varphi \in X$

$$\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi\rangle| &\le \int\limits_\Omega \big||\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi + su\varphi\big|\,dx \\
&\le \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dx + \int\limits_\Omega s|u\varphi|\,dx \\
&\le \Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p'(p-1)}\,dx\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + s\Big[\Big(\int\limits_\Omega |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_\Omega |\varphi|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \\
&= \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2},
\end{aligned}$$

wobei wir die Hölderungleichung und $p' = \frac{p}{p-1}$ benutzt haben. Für $1 \le p < n$ gilt die Einbettung $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ mit $q \le \frac{np}{n-p}$. Insbesondere gilt also $X \hookrightarrow L^2(\Omega)$, falls $2 \le \frac{np}{n-p} \Leftrightarrow p \ge \frac{2n}{n+2}$. Falls $p \ge n$ ist, verwenden wir die Einbettungen $X \hookrightarrow W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $q < \infty$. Also erhalten wir, dass für $p \ge \frac{2n}{n+2}$ und alle $v \in X$ gilt:

$$\|v\|_{L^2} \le C_1\|v\|_X \le C_2\|\nabla v\|_{L^p}.$$

Insgesamt ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi\rangle| &\le \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla\varphi\|_{L_p} + s\|u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\
&\le C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p})\|\nabla\varphi\|_{L^p}\,.
\end{aligned}$$

Aus der Definition der Norm von Au in X^* ergibt sich:

$$\|Au\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle Au, \varphi\rangle| \le C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p}),$$

und somit ist $Au \in X^*$ sowie $A\colon X \to X^*$, sofern $p \ge \frac{2n}{n+2}$.

2. Mit Hilfe der Hölderungleichung und der Definition der dualen Norm ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|b\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle b, \varphi\rangle| \le \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} \|f\|_{L^{p'}}\|\varphi\|_{L^p} \\
&\le C\|f\|_{L^{p'}},
\end{aligned}$$

da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, d.h. $\|\varphi\|_{L^p} \le C\|\varphi\|_X$.

3. Aus 1., 2. und den Definitionen von A und b folgt, dass die schwache Formulierung von (1.24) gerade

$$\langle Au, \varphi\rangle = \langle b, \varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in X$$

ist. Dies ist aber die Operatorgleichung $Au = b$ in X^*. ∎

- Im Falle $s = 0$ ist im vorherigen Lemma die Einschränkung $p \ge \frac{2n}{n+2}$ nicht nötig.

1.29 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.27 erfüllt der durch (1.25) gegebene Operator $A\colon X \to X^*$ die Voraussetzungen von Satz 1.5.*

Beweis : 1. $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein separabler und reflexiver Banachraum.
2. A ist strikt monoton: Der Operator A wird durch die Funktion

$$\boldsymbol{g} = (g_1, \dots, g_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{\zeta} \mapsto |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\boldsymbol{\zeta} \tag{1.30}$$

generiert. Wir haben für $i, j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j}(\boldsymbol{\zeta}) = |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)\,|\boldsymbol{\zeta}|^{p-4}\zeta_i\zeta_j$$

und somit gilt für alle $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j}(\boldsymbol{\zeta})\eta_i\eta_j &= |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\big(|\boldsymbol{\eta}|^2 + (p-2)\frac{(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\eta})^2}{|\boldsymbol{\zeta}|^2}\big) \\ &\geq min(1, p-1)\,|\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}|\boldsymbol{\eta}|^2.\end{aligned}$$

Für beliebige $u, v \in X$ haben wir also

$$\begin{aligned}&\langle Au - Av, u - v\rangle \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \big(g_i(\nabla u) - g_i(\nabla v)\big)(\partial_i u - \partial_i v)\,dx \;+\; s\int_\Omega |u-v|^2\,dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{d}{d\tau} g_i\big(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)\big)\,d\tau\,(\partial_i u - \partial_i v)\,dx \;+\; s\int_\Omega |u-v|^2\,dx \\ &= \int_\Omega \int_0^1 \sum_{i-j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j}\big(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)\big)(\partial_j u - \partial_j v)(\partial_i u - \partial_i v)\,d\tau dx + s\int_\Omega |u-v|^2\,dx \\ &\geq c\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^2 \int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2}\,d\tau dx \;+\; s\int_\Omega |u-v|^2\,dx \\ &> 0\end{aligned}$$

für $u \neq v$, da $s \geq 0$ und da für den Integranden[1] $|\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} > 0$ gilt mit Ausnahme möglicherweise eines Punktes τ_0.

3. A ist koerziv: Wir haben für $u \in X$

$$\langle Au, u\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^p \;+ suu\,dx = \|\nabla u\|_{L^p}^p + s\|u\|_{L^2}^2 \geq \|\nabla u\|_{L^p}^p,$$

und also

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} \geq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \to \infty \qquad (\|u\|_X \to \infty)\,,$$

falls $p > 1$.

[1]Man beachte, dass das Integral $\int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} d\tau$ endlich ist für $p > 1$.

4. A ist stetig: Sei dazu $(u_n) \subseteq X$ eine Folge mit

$$u_n \to u \qquad \text{in } X \quad (n \to \infty)\,,$$

d.h. insbesondere $\nabla u_n \to \nabla u$ in $L^p(\Omega) \quad (n \to \infty)$. Wir setzen $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\zeta})$, wobei $\boldsymbol{g}$ in (1.30) definiert ist. Da $\boldsymbol{g}$ komponentenweise die Abschätzung

$$|g_i(\boldsymbol{\zeta})| \le c|\boldsymbol{\zeta}|^{p-1} = c|\boldsymbol{\zeta}|^{\frac{p}{q}}\,, \quad i = 1, \dots, n\,,$$

mit $q = \frac{p}{p-1}$ erfüllt, ist $\boldsymbol{F}$ ein vektorwertiger Nemyckii–Operator. Aus Lemma 1.19 folgt daher, dass $\boldsymbol{F} : (L^p(\Omega))^n \to (L^{p'}(\Omega))^n$ stetig ist, d.h.

$$\boldsymbol{F}(\nabla u_n) \to \boldsymbol{F}(\nabla u) \qquad \text{in } \big(L^{p'}(\Omega)\big)^n$$

für unsere Folge (u_n). Daraus folgt

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Au, \varphi\rangle &= \int_\Omega \big(\boldsymbol{F}(\nabla u_n) - \boldsymbol{F}(\nabla u)\big)\nabla\varphi\, dx + \int_\Omega s(u_n - u)\varphi\, dx \\ &\le c\,\|\boldsymbol{F}(\nabla u_n) - \boldsymbol{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}}\|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u_n - u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\ &\le c\,\big(\|\boldsymbol{F}(\nabla u_n) - \boldsymbol{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}} + \|u_n - u\|_X\big)\|\varphi\|_X \end{aligned}$$

da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ für $p \ge \frac{2n}{n+2}$. Nach der Definition der Norm im Dualraum gilt dann

$$\begin{aligned} \|Au_n - Au\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle Au_n - Au, \varphi\rangle| \\ &\le c\,(\|\boldsymbol{F}(\nabla u_n) - \boldsymbol{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}} + \|u_n - u\|_X). \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ geht die rechte Seite gegen 0, da $u_n \to u$ in X und $\boldsymbol{F}(\nabla u_n) \to \boldsymbol{F}(\nabla u)$ in $L^{p'}(\Omega)$ für $n \to \infty$. Also ist der Operator A stetig und damit insbesondere hemistetig. ■

1.31 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$ und sei $s \ge 0$. Für $p \ge \frac{2n}{n+2}$, $p > 1$ und alle $f \in L^{p'}(\Omega), p' = \frac{p}{p-1}$, existiert genau eine schwache Lösung u von (1.23), d.h. (1.24) bzw. (1.28) gelten.*

Beweis : Die Lemmata 1.27 und 1.29 liefern, dass wir Satz 1.5 anwenden können, der sofort die Behauptung gibt. ■

• Satz 1.31 kann man auf die Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbf{A}(x, \nabla u)) &= f \qquad && \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

verallgemeinern, falls $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\mathbf{A}$ ist eine Carathéodory–Funktion,

(ii) $|\mathbf{A}(x, \boldsymbol{\eta})| \le C\big(g(x) + |\boldsymbol{\eta}|^{p-1}\big)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ (Wachstumsbedingung),

(iii) $\big(\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{A}(x,\boldsymbol{\zeta})\big) \cdot (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})) \geq 0$, für fast alle x (Monotonie),

(iv) $\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\eta} \geq c|\boldsymbol{\eta}|^p - h(x)$, $h \in L^1(\Omega)$ (Koerzivität).

• Satz 1.31 gilt auch für beliebige $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$. Man kann zeigen, dass solche f eine Darstellung der Form

$$f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i + f_0\,,$$

mit $f_i \in L^{p'}(\Omega)$, $i = 0, \dots, n$, besitzen.

3.2 Pseudomonotone Operatoren

Der Satz von Brezis

Ziel dieses Kapitels ist es, eine Theorie zu entwickeln, die es ermöglicht, auch solche quasilinearen elliptischen Gleichungen zu lösen, die einen Term von niedrigerer Ordnung enthalten, der nicht monoton ist. Zum Beispiel kann die Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f \qquad \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

nicht mit Hilfe der Theorie monotoner Operatoren gelöst werden, falls $g(u)u$ nicht positiv ist. Eine Inspektion des Beweises von Satz 1.5 zeigt aber, dass wir allgemeinere Operatoren zulassen können, nämlich *pseudomonotone Operatoren*. Typische Beispiele für pseudomonotone Operatoren sind Operatoren der Form

$$A = A_1 + A_2,$$

wobei $A_1 \colon X \to X^*$ monoton, hemistetig und $A_2 \colon X \to X^*$ stark stetig, also kompakt, ist, d.h. die Theorie pseudomonotoner Operatoren vereinigt Monotonie und Kompaktheit. Im Folgenden werden wir zuerst die allgemeine Theorie entwickeln und dann diese auf (2.1) anwenden.

2.2 Definition. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und $A \colon X \to X^*$ ein Operator. Wir sagen, A* ***genügt der Bedingung*** *(M), falls*

$$\begin{gathered} u_n \rightharpoonup u\,, \quad Au_n \rightharpoonup b\,, \qquad (n \to \infty) \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle_X \leq \langle b, u\rangle_X \end{gathered}$$

folgt, dass $Au = b$ gilt.

Diese Bedingung ist wichtig, weil sie invariant unter „kompakten“ Perturbationen ist. Außerdem erfüllen monotone Operatoren diese Bedingung. Genauer gilt:

2.3 Lemma. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und $A \colon X \to X^*, B \colon X \to X^*$ seien Operatoren. Dann gilt:*

(i) *Ist A monoton und hemistetig, dann genügt A der Bedingung (M).*

(ii) *Wenn A der Bedingung (M) genügt und B stark stetig ist, dann genügt $A + B$ der Bedingung (M).*

Beweis : 1. Dies ist nichts anderes als Mintys Trick aus Lemma 0.3 (ii).
2. Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit

$$u_n \rightharpoonup u, \quad Au_n + Bu_n \rightharpoonup b, \qquad (n \to \infty)\,,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n\rangle \le \langle b, u\rangle\,.$$

Da B stark stetig ist, folgt $Bu_n \to Bu\,, (n \to \infty)$ und also $\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \le \langle b - Bu, u\rangle$ und $Au_n \rightharpoonup b - Bu\,, (n \to \infty)$. Da A der Bedingung (M) genügt, folgt $Au = b - Bu$, d.h. $Au + Bu = b$. ∎

2.4 Definition. *Sei $A\colon X \to X^*$ ein Operator auf dem reellen, reflexiven Banachraum X. Dann heißt A* ***pseudomonoton****, falls aus*

$$u_n \rightharpoonup u \quad (n \to \infty)\,, \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_X \le 0$$

folgt, dass für alle $w \in X$ gilt:

$$\langle Au, u - w\rangle_X \le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X.$$

Das folgende Lemma gibt typische Beispiele für pseudomonotone Operatoren an.

2.5 Lemma. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum, und $A, B\colon X \to X^*$ seien Operatoren. Dann gilt*

(i) *Falls A monoton und hemistetig ist, dann ist A pseudomonoton.*
(ii) *Falls A stark stetig ist, dann ist A pseudomonoton.*
(iii) *Falls A und B pseudomonoton sind, dann ist $A + B$ pseudomonoton.*
(iv) *Falls A pseudomonoton ist, dann genügt A der Bedingung (M).*
(v) *Ist A pseudomonoton und lokal beschränkt, dann ist A demistetig.*

Beweis : 1. Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit $u_n \rightharpoonup u$, $(n \to \infty)$ und $\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0$. Da A monoton ist, gilt

$$\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \ge 0\,,$$

woraus folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \ge \liminf_{n\to\infty} \langle Au, u_n - u\rangle = 0\,.$$

Dies impliziert

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle = 0. \tag{2.6}$$

Für beliebige $w \in X$ setzen wir $z = u + t(w - u)$, $t > 0$. Die Monotonie von A impliziert

$$\langle Au_n - Az, u_n - (u + t(w - u))\rangle \ge 0,$$

was äquivalent zu

$$t\langle Au_n, u-w\rangle \geq \langle -Au_n, u_n-u\rangle + \langle Az, u_n-u\rangle + t\langle Az, u-w\rangle$$

ist. Somit erhalten wir für alle $w \in X$:

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n-w\rangle \geq \langle Az, u-w\rangle,$$

wobei wir (2.6) und $u_n \rightharpoonup u$, $(n\to\infty)$, sowie $t>0$ benutzt haben. Nun verwenden wir die Hemistetigkeit von A und erhalten für $t\to 0^+$, dass $Az \rightharpoonup Au$ und deshalb

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n-w\rangle \geq \langle Au, u-w\rangle \qquad \forall w\in X.$$

2. Sei $(u_n)\subseteq X$ sei eine Folge mit $u_n \rightharpoonup u$, $(n\to\infty)$. Dann gilt $Au_n \to Au$, $(n\to\infty)$, nach Definition der starken Stetigkeit. Somit gilt für alle $w\in X$ nach Lemma 0.4 (ii)

$$\langle Au, u-w\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n-w\rangle.$$

3. Wir wählen eine Folge $(u_n)\subseteq X$ mit $u_n \rightharpoonup u$, $(n\to\infty)$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n-u\rangle \leq 0\,. \tag{2.7}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n-u\rangle &\leq 0\\ \limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n-u\rangle &\leq 0\,,\end{aligned} \tag{2.8}$$

was wir durch Widerspruch beweisen. Sei (u_{n_k}) eine Teilfolge von (u_n), so dass

$$\limsup_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k}-u\rangle = a > 0\,.$$

Aus (2.7) folgt dann

$$\limsup_{k\to\infty} \langle Bu_{n_k}, u_{n_k}-u\rangle \leq -a\,.$$

Da B pseudomonoton ist, gilt für alle $w\in X$

$$\langle Bu, u-w\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \langle Bu_{n_k}, u_{n_k}-w\rangle.$$

Für $w=u$ erhalten wir aber $0\leq -a<0$, was ein Widerspruch ist. Also gilt (2.8) und liefert mit der Pseudomontonie von A und B

$$\begin{aligned}\langle Au, u-w\rangle &\leq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n-w\rangle,\\ \langle Bu, u-w\rangle &\leq \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n-w\rangle\,.\end{aligned}$$

Addieren wir beide Ungleichungen ergibt sich für alle $w \in X$

$$\langle Au + Bu, u - v\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - w\rangle,$$

d.h. $A + B$ ist pseudomonoton.

4. Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit

$$u_n \rightharpoonup u\,, \quad Au_n \rightharpoonup b\,, \quad (n \to \infty), \qquad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \le \langle b, u\rangle.$$

Dies impliziert $\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0$. Da A pseudomonoton ist, folgt daher für alle $w \in X$

$$\begin{aligned}\langle Au, u - w\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \\ &\le \langle b, u\rangle - \langle b, w\rangle = \langle b, u - w\rangle\end{aligned}$$

Wir ersetzen w durch $2u - w$, dann folgt für alle $w \in X : \langle Au, u - w\rangle = \langle b, u - w\rangle$ und somit $Au = b$.

5. Sei $(u_n) \subseteq X$ sei eine Folge mit $u_n \to u$, $(n \to \infty)$. Da A lokal beschränkt ist, ist die Folge (Au_n) beschränkt. X ist reflexiv und daher gibt es eine Teilfolge (Au_{n_k}) mit $Au_{n_k} \rightharpoonup b, (k \to \infty)$, und wir erhalten $\lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle = 0$. Die Pseudomonotonie von A impliziert

$$\begin{aligned}\langle Au, u - w\rangle &\le \liminf_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - w\rangle \\ &= \langle b, u - w\rangle.\end{aligned}$$

Damit folgt wie in 4. $Au = b$, d.h. $Au_{n_k} \rightharpoonup Au, (k \to \infty)$. Das Konvergenzprinzip Lemma 0.4 (iii) liefert, da obige Argumentation für beliebige konvergente Teilfolgen gilt,

$$Au_n \rightharpoonup b = Au \qquad\qquad (n \to \infty),$$

d.h. A ist demistetig. ∎

2.9 Satz (Brezis, 1968). *Sei $A\colon X \to X^*$ ein pseudomonotoner, beschränkter und koerziver Operator, wobei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum ist. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von*

$$Au = b\,. \tag{2.10}$$

Beweis : Nach Lemma 2.5 (v) ist A demistetig, da A pseudomonoton und beschränkt ist; nach Lemma 2.5 (iv) genügt A der Bedingung (M), da A pseudomonoton ist. Sei $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basis von X. Wir verwenden nun das Galerkin–Verfahren genauso wie im Beweis von Satz 1.5, d.h. wir suchen

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k,$$

die das Gleichungssystem

$$g_k(c_k^n) = g_k(u_n) \equiv \langle Au_n - b, w_k\rangle = 0\,, \qquad k = 1, \dots, n \tag{2.11}$$

lösen. Die Lösbarkeit diese Gleichungssystemes folgt wie im Beweis des Satzes von Browder, Minty (Satz 1.5), da A demistetig und koerziv ist. Die Demistetigkeit von A impliziert nämlich, dass die $g_k, k = 1, \dots, n$, stetig sind, und die Koerzivität von A, dass $\sum g_k(c_k^n)c_k^n > 0$ für alle $\|u_n\| = R$ (vgl. (1.11)). Außerdem erhalten wir aus der Koerzivität auch eine apriori–Schranke (vgl. (1.12)), d.h.

$$\|u_n\|_X \le R \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also gibt es eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \rightharpoonup u\,, (k \to \infty)$. Wir wollen nun zeigen, dass u (2.10) löst. Aus den Gleichungen der Galerkin–Approximation (2.11) folgt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k} - b, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in \operatorname{span}\{w_1, \dots\}.$$

Die Beschränktheit von A liefert, dass die Folge (Au_{n_k}) beschränkt ist und einen schwachen Limes besitzt, d.h.

$$Au_{n_k} \rightharpoonup c\,, \qquad (k \to \infty)\,.$$

Es gilt aber $c = b$ mit denselben Argumenten wie im Beweisteil 3. von Satz 1.5. Aus dem Galerkin–System mit $w = u_n$ und der schwachen Konvergenz der (u_{n_k}) erhalten wir

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \langle b, u_{n_k}\rangle \to \langle b, u\rangle\,, \qquad (k \to \infty).$$

Daher sind die Voraussetzung für die Bedingung (M) erfüllt, und es folgt

$$Au = b.$$

■

Quasilineare elliptische Gleichungen II

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f \qquad &&\text{auf } \Omega\,,\\ u &= 0 &&\text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$ ist und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Wir setzen $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ und definieren folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} \langle A_1 u, \varphi\rangle &\equiv \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\,dx\,,\\ \langle A_2 u, \varphi\rangle &\equiv \int_\Omega g(u)\varphi\,dx\,,\\ \langle b, \varphi\rangle &\equiv \int_\Omega f\varphi\,dx\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Wir gehen analog zum Abschnitt 3.1 vor. Dort wurden bereits der Operator A_1 (vgl. Lemmata 1.27, 1.29 mit $s = 0$) und das Funktional b behandelt. Bezüglich des Operators A_2 haben wir

2.13 Lemma. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitz stetigem Rand $\partial\Omega$. An die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stellen wir folgende Wachstumsbedingung:*

$$|g(s)| \le c(1 + |s|^{r-1}), \tag{2.14}$$

wobei $1 \le r \le \infty$. Für $1 \le p \le n$ und $r \le \frac{np}{n-p}$ bildet der in $(2.12)_2$ definierte Operator A_2 den Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ in seinen Dualraum X^* ab und ist beschränkt. Für $r < \frac{np}{n-p}$ ist A_2 stark stetig.

Beweis : 1. Aus der Definition von A_2 und (2.14) erhalten wir für $q = \frac{np}{n-p}$ und $u, \varphi \in X$

$$\begin{aligned} |\langle A_2 u, \varphi\rangle| &\le \int_\Omega c(1 + |u|^{r-1})|\varphi|\, dx \\ &\le c\Big(\int_\Omega (1 + |u|^{r-1})^{q'}\, dx\Big)^{\frac{1}{q'}} \Big(\int_\Omega |\varphi|^q\, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\le c\Big(1 + \Big(\int_\Omega |u|^{(r-1)q'}\, dx\Big)^{\frac{1}{q'}}\Big)\Big(\int_\Omega |\varphi|^q\, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\le c\big(1 + \|u\|^{r-1}_{L^{(r-1)q'}}\big)\|\varphi\|_X, \end{aligned}$$

da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Somit erhalten wir

$$|\langle A_2 u, \varphi\rangle| \le c\,(1 + \|u\|_X^{r-1})\,\|\varphi\|_X\,, \tag{2.15}$$

sofern $(r-1)q' \le q$, denn $X \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^\alpha(\Omega)$ für $q \ge \alpha$. Die Forderung $(r-1)q' \le q$ läßt sich umformen zu

$$\begin{array}{rrcl} & (r-1)\frac{1}{q} & \le & \frac{1}{q'} \\ \Leftrightarrow & (r-1)\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\Big) & \le & \frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow & r\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\Big) & \le & 1 \\ \Leftrightarrow & r & \le & \frac{np}{n-p}. \end{array}$$

Aus der Definition der Operatornorm folgt

$$\|A_2 u\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\|_X \le 1}} |\langle A_2, \varphi\rangle| \le c(1 + \|u\|_X^{r-1})$$

und demzufolge $A_2 u \in X^*$, d.h. $A_2 \colon X \to X^*$. Aus dieser Abschätzung folgt sofort, dass A_2 beschränkt ist.

2. Sei $(u_n) \subseteq X$ eine schwach konvergente Folge in X, d.h. $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$. Aufgrund der kompakten Einbettung $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega)$, für $r < \frac{np}{n-p}$ gilt also für eine Teilfolge

$$u_{n_k} \to u \qquad \text{in } L^r(\Omega), \quad (k \to \infty). \tag{2.16}$$

Wir setzen

$$F(u) = g(u)$$

und erhalten mit Hilfe der Wachstumsbedingung (2.14) und der Stetigkeit von g, dass der Nemyckii Operator F die Voraussetzungen von Lemma 1.19 erfüllt. Da $r - 1 = \frac{r}{r'}$ gilt, ist $F : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ stetig, d.h. für die Folge in (2.16) gilt:

$$\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\|_X \le 1}} |\langle A_2 u_{n_k} - A_2 u, \varphi\rangle| &\le \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\|_X \le 1}} \int_\Omega |g(u_{n_k}) - g(u)||\varphi|\, dx \\ &= \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\|_X \le 1}} \|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}} \|\varphi\|_{L^r} \to 0 \qquad (k \to \infty),\end{aligned}$$

denn $X \hookrightarrow L^r(\Omega)$ und damit $\|\varphi\|_{L^r} \le c\|\varphi\|_X$. Somit folgt $A_2 u_{n_k} \to Au$ in X^*. Da diese Argumentation für alle Teilfolgen, die (2.16) erfüllen gilt, liefert das Konvergenzprinzip Lemma 0.4 (iii), dass A_2 stark stetig ist, d.h. $A_2 u_n \to A_2 u$ in X^*, $(n \to \infty)$. ■

Um Satz 2.9 anwenden zu können benötigen wir noch folgendes Lemma.

2.17 Lemma. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 2.13 erfülle g die Koerzivitätsbedingung*

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} g(s)s > -\infty\,. \tag{2.18}$$

und es sei $p > 1$. Dann ist der Operator $A = A_1 + A_2 : X \to X^*$ koerziv.

Beweis : Wir haben (vgl. Beweis von Lemma 1.29)

$$\langle A_1 u, u\rangle = \|\nabla u\|_{L^p}^p\,.$$

und aufgrund von (2.18) gilt für eine Konstante $c_0 \in \mathbb{R}^+$

$$\langle A_2 u, u\rangle = \int_\Omega g(u) u\, dx > -c_0\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} &= \frac{\langle A_1 u, u\rangle}{\|u\|_X} + \frac{\langle Au_2, u\rangle}{\|u\|_X} \\ &\ge \frac{\langle Au_1, u\rangle}{\|\nabla u\|_{L^p}} - \frac{c_0}{\|\nabla u\|_{L^p}} \\ &\ge \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} - \frac{c_0}{\|\nabla u\|_{L^p}} \to \infty \qquad (\|\nabla u\|_{L^p} \to \infty),\end{aligned}$$

falls $p > 1$. Also ist der Operator A koerziv. ■

2.19 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Sei $1 < p < n$ und die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzungen (2.14) und (2.18), mit $1 \leq r < \frac{np}{n-p}$. Dann existiert für alle $f \in L^{p'}(\Omega)$ eine verallgemeinerte Lösung von (2.1), d.h. es gibt ein $u \in W_0^{1,p}(\Omega) = X$, so dass*

$$Au = b\,.$$

Beweis : Wir wollen den Satz von Brezis (Satz 2.9) anwenden. Der Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein reflexiver, separabler Banachraum. Aus den Lemmata 1.27 und 1.29 wissen wir, dass $A_1 : X \to X^*$ ein strikt monotoner und stetiger, also auch beschränkter, Operator ist. Also ist A_1 nach Lemma 2.5 (i) pseudomonoton. Nach Lemma 2.13 ist A_2 ein stark stetiger, also auch beschränkter, Operator. Lemma 2.5 (ii) besagt, dass somit A_2 pseudomonoton ist. Insgesamt ist also $A = A_1 + A_2$ ein beschränkter pseudomonotoner Operator, der nach Lemma 2.17 auch koerziv ist. Lemma 1.27 liefert, dass $b \in X^*$ gilt. Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 2.9. ■

Die stationären Navier–Stokes–Gleichungen

Die stationären Navier–Stokes–Gleichungen lauten[2]

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{u} + [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad & \text{auf } \Omega\,, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \qquad & \text{auf } \Omega\,, \\ \mathbf{u} = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.20}$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ ist. Diese Gleichungen beschreiben die Strömung einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit. Es ist $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ der Druck und $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine äussere Kraft. Wir setzen

$$X = \{\mathbf{u} \in \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3 \,\big|\, \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}\,. \tag{2.21}$$

Dies ist offensichtlich ein linearer Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$, den wir mit der Norm

$$\|\mathbf{u}\|_X = \|\nabla\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \tag{2.22}$$

versehen. Wir definieren für alle $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in X$

$$\begin{aligned} \langle A_1\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle &= \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}\,dx\,, \\ \langle A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle &= \int_\Omega [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\,, \\ \langle P, \boldsymbol{\varphi}\rangle &= \int_\Omega \nabla p\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx = -\int p\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\,dx = 0\,, \\ \langle b, \boldsymbol{\varphi}\rangle &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

[2] Wir benutzen die Notation $[\nabla\mathbf{u}]u = \big(\sum_{j=1}^{3}(\partial_j u_i)\,u_j\big)_{i=1,2,3}$

Offensichtlich ist die Operatorgleichung $A_1 + A_2 = b$ in X^* äquivalent zur schwachen Formulierung von Problem (2.20), d.h. für alle $\boldsymbol{\varphi} \in X$ gilt

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\boldsymbol{\varphi}\, dx + \int_\Omega [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx\,. \tag{2.24}$$

Wir überprüfen nun, dass A_1, $A_2\colon X \to X^*$, $b \in X^*$ gilt, und dass der Operator $A = A_1 + A_2$ die Voraussetzungen von Satz 2.9 erfüllt.

2.25 Lemma. *Der Raum X mit der Norm* (2.22) *ist ein reflexiver, separabler Banachraum.*

Beweis : Der Raum X, definiert in (2.21) ist ein abgeschlossener Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$. Sei $(\mathbf{u}_n) \subseteq X$ eine Folge mit $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in X $(n \to \infty)$. Die Konvergenz in X bedeutet gerade, dass $\nabla\mathbf{u}_n \to \nabla\mathbf{u}$ in $L^2(\Omega)$ $(n \to \infty)$. Daher gibt es eine Teilfolge mit $\nabla\mathbf{u}_{n_k} \to \nabla\mathbf{u}$ fast überall. Daraus folgt aber, dass $\operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{tr}\nabla\mathbf{u} = 0$. Die Abgeschlossenheit von X stellt sicher, dass X ein separabler Banachraum ist. Außerdem ist eine abgeschlossene Teilmenge eines reflexiven Raumes wieder reflexiv. ■

2.26 Lemma. *Unter dem obigen Voraussetzungen an Ω und mit X, definiert in* (2.21)*, ist der Operator $A_1 : X \to X^*$ linear, stetig, koerziv, strikt monoton und beschränkt.*

Beweis : Der Operator $A_1 : X \to X^*$ ist eine vektorwertige Variante des Operators $A : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ in Lemma 1.27 mit $p = 2$ und $s = 0$. Da X ein abgeschlossener Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ ist folgt sofort

$$A_1\colon X \subseteq \big(W_0^{1,2,}(\Omega)\big)^3 \to \big((W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3 \subseteq X^*\,,$$

da die Restriktion auf X eines Funktionals definiert auf $\big(W_0^{1,2,}(\Omega)\big)^3$ auch ein Funktional auf X ist. Die Behauptung folgt also sofort aus Lemma 1.27 und Lemma 1.29. ■

2.27 Lemma. *Der Operator A_2 definiert in* (2.23) *ist ein stark stetiger, beschränkter Operator von X nach X^*.*

Beweis : 1. Für alle $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in X$ gilt

$$\begin{aligned} |\langle A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| &\le \int_\Omega |\mathbf{u}||\nabla\mathbf{u}||\boldsymbol{\varphi}|\, dx \\ &\le \Big(\int_\Omega |\mathbf{u}|^4\, dx\Big)^{\frac14}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{\varphi}|^4\, dx\Big)^{\frac14}\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2} \\ &\le c\,\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\|\boldsymbol{\varphi}\|_X, \end{aligned}$$

denn $X \hookrightarrow L^4(\Omega)$ wegen $\frac14 \ge \frac1p - \frac1n = \frac16$. Aus der Abschätzung folgt $A_2\mathbf{u} \in X^*$ und damit $A_2\colon X \to X^*$, als auch die Beschränktheit von A_2.

2. A_2 ist stark stetig: Sei $(\mathbf{u}_n) \subseteq X$ eine Folge mit $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ $(n \to \infty)$. Aus der kompakten Einbettung $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^4(\Omega)$, erhalten wir für eine Teilfolge $\mathbf{u}_{n_k} \to \mathbf{u}$ in $L^4(\Omega)$ $(k \to \infty)$. Da die weitere Argumentation wieder für alle konvergenten Teilfolgen gilt, bezeichnen wir die obige Teilfolge wiederum mit $(\mathbf{u}_n)$. Wir werden zeigen, dass gilt:

$$\|A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}\|_{X^*} = \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in X \\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_X \le 1}} |\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Nehmen wir an, dies gelte nicht. Also existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und Elemente $\boldsymbol{\varphi}_n \in X$, $\|\boldsymbol{\varphi}_n\|_X \le 1$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| \ge \varepsilon_0 \,.$$

Die Folge $(\boldsymbol{\varphi}_n)$ ist beschränkt und also gibt es eine Teilfolge $(\boldsymbol{\varphi}_{n_k})$ mit $\boldsymbol{\varphi}_{n_k} \rightharpoonup \boldsymbol{\varphi}$ in X $(k \to \infty)$, und $\boldsymbol{\varphi}_{n_k} \to \boldsymbol{\varphi}$ in $L^4(\Omega)$ $(k \to \infty)$. Für diese Teilfolge, im Folgenden mit $(\boldsymbol{\varphi}_n)$ bezeichnet, gilt

$$\begin{aligned}
|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| &= \Big| \int_\Omega [\nabla\mathbf{u}_n]\mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\varphi}_n - [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n \, dx \Big| \\
&= \Big| \int_\Omega [\nabla\mathbf{u}_n](\mathbf{u}_n - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_n + [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}) \\
&\qquad + [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \Big| \\
&\le \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^4} \|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2} \|\boldsymbol{\varphi}_n\|_{L^4} + \|\mathbf{u}\|_{L^4} \|\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\|_{L^2} \|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}\|_{L^4} \\
&\qquad + \Big| \int_\Omega [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \Big| \\
&\le C_1 \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^4} + C_2 \|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}\|_{L^4} \\
&\qquad + \Big| \int_\Omega [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \Big| \to 0 \qquad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

da $\|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2}$ beschränkt ist, $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in $L^4(\Omega)$, $\nabla\mathbf{u}_n \rightharpoonup \nabla\mathbf{u}$ in $L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{\varphi}_n \to \boldsymbol{\varphi}$ in $L^4(\Omega)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Damit folgt $A_2\mathbf{u}_n \to A_2\mathbf{u}$, d.h. A_2 ist stark stetig auf X. ■

2.28 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigen Rand $\partial\Omega$. Dann gibt es zu einem beliebigen $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$ ein $\mathbf{u} \in X$, wobei X in (2.21) definiert ist, so dass $\mathbf{u}$ (2.20) im schwachen Sinne löst, d.h. (2.24) gilt.*

Beweis : Aufgrund der Lemmata 2.26, 2.27 und 2.5 ist der Operator $A = A_1 + A_2 \colon X \to X^*$ beschränkt und pseudomonoton. Es bleibt zu zeigen, dass A auch koerziv ist. Für alle $\mathbf{u} \in X$ haben wir:

$$\begin{aligned}
\langle A_2\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i u_j \, dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) dx \\
&= -\int_\Omega \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = 0 \,,
\end{aligned}$$

da für $\mathbf{u} \in X$ gilt $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Da A_1 koerziv ist, ist also insgesamt A koerziv auf X [3]. Offensichtlich ist $b \in (W_0^{1,2}(\Omega)^3)^* \subseteq X^*$, sofern $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$, mit denselben Argumenten wie in Lemma 1.27. Satz 2.9 liefert die Behauptung des Satzes. ■

- Bisher haben wir die Existenz einer Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ gezeigt, die (2.24) erfüllt. Um auch einen Druck p zu finden, so dass für alle $\boldsymbol{\varphi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^3$ gilt

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \,, \tag{2.29}$$

muss man den *Satz von De Rham* auf $\mathbf{F} \in \big((W_0^{1,2}(\Omega))^3\big)^*$ definiert durch

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \equiv \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx$$

anwenden.

2.30 Satz (De Rham, 1960). *Sei* $\mathbf{F} \in \big((W_0^{1,2}(\Omega))^3\big)^*$ *ein Funktional, für das für alle* $\boldsymbol{\varphi} \in X$ *gilt*

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0 \,.$$

Dann existiert ein $p \in L^2(\Omega)$ *mit* $\int_\Omega p \, dx = 0$, *so dass für alle* $\boldsymbol{\varphi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^3$ *gilt*

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, dx \,.$$

Eine weitere Anwendung für den Satz von Brezis ist das Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \alpha \sin(u) \sum_{i=1}^3 \partial_i u &= f \qquad \text{auf } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $\alpha > 0$. Dieses Randwertproblem besitzt für alle $f \in L^2(\Omega)$ und kleine α eine Lösung im verallgemeinerten Sinn.

3.3 Maximal monotone Operatoren

Die Theorie *maximal monotoner* Operatoren ist das Herzstück in der Theorie monotoner Operatoren, da es die Grundideen zur vollen Entfaltung bringt und sehr allgemein ist. Intuitiv kann man sich unter einem maximal monotonen Operator einen monotonen Operator vorstellen, der keine echte monotone Erweiterung besitzt.

[3] Die Koerzivität ist die einzige Eigenschaft, die nur auf X und nicht auf $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ gilt. Zum Beweis der anderen Eigenschaften benötigen wir nicht, dass $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.