Beispiele:

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und monoton wachsend, z.B. sei
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ x^2 & \text{für } x \geq 0\,. \end{cases}$$
Eine solche Funktion ist maximal monoton.

2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monoton wachsend, aber unstetig, z.B. sei
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ x^2 + 2 & \text{für } x \geq 0\,. \end{cases}$$
f ist monoton, aber nicht maximal monoton. Es gibt nämlich eine Erweiterung die monoton ist, z.B.
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ [0,2] & \text{für } x = 0\,, \\ x^2 + 2 & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

Allerdings müssen wir für die maximale Monotonie „bezahlen", denn wir müssen „mehrdeutige" Funktionen oder genauer Abbildungen zulassen.

3.1 Definition. *Sei $A : M \to 2^Y$ eine **Abbildung**, d.h. A ordnet allen $u \in M$ eine Teilmenge $Au \subseteq Y$ zu, d.h. $Au \in 2^Y$. Dann ist*
$$D(A) = \{u \in M \,\big|\, Au \neq \emptyset\}$$
*der **effektive Definitionsbereich**, ferner ist*
$$R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au$$
*der **Wertebereich** und*
$$G(A) = \{(u,v) \in M \times Y \,\big|\, u \in D(A), v \in Au\}$$
*der **Graph** von A. Wir schreiben für $(u,v) \in G(A)$ einfacher $(u,v) \in A$.*

- Die *inverse Abbildung* $A^{-1}\colon Y \to 2^M$ existiert immer und ist definiert durch
$$A^{-1}(v) = \{u \in M \,\big|\, v \in Au\}\,.$$
Offensichtlich gilt $D(A^{-1}) = R(A)$, $R(A^{-1}) = D(A)$ und $(u,v) \in A$ genau dann, wenn $(v,u) \in A^{-1}$.

- Seien X, Y lineare Räume über $\mathbb{K}$ und $M \subseteq X$. Für gegebene Abbildungen $A, B\colon M \to 2^Y$ und für feste α, $\beta \in \mathbb{K}$ definieren wir die **Linearkombination**
$$(\alpha A + \beta B)(u) = \begin{cases} \alpha Au + \beta Bu & \text{für } u \in D(A) \cap D(B)\,, \\ \emptyset & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

- Jede eindeutige Abbildung $A\colon D(A) \subseteq M \to Y$ kann mit einer mehrdeutigen Abbildung $\bar{A}\colon M \to 2^Y$ identifizert werden, indem wir

$$\bar{A}u = \begin{cases} \{Au\} & \text{für } u \in D(A)\,, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

setzen. Dann gilt

$$D(\bar{A}) = D(A) \qquad \text{und} \qquad R(\bar{A}) = R(A).$$

Im Folgenden verwenden wir immer diese Identifizierung und schreiben kürzer A statt $\bar{A}$.

3.2 Definition. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Abbildung $A\colon M \to 2^{X^*}$ heißt*

(i) ***monoton*** *genau dann, wenn für alle $(u, u^*), (v, v^*) \in A$ gilt:*

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \geq 0,$$

(ii) ***maximal monoton*** *genau dann, wenn A monoton ist, und aus $(u, u^*) \in M \times X^*$ sowie*

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A$$

folgt, dass $(u, u^*) \in A$.

- Ein Operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X^*$ kann mit obiger Identifizierung als mehrdeutige Abbildung $\bar{A}\colon X \to 2^{X^*}$ aufgefaßt werden. Die Definiton 1.1 der Monotonie als Operator A ist mit der Definition 3.2 der Monotonie als mehrdeutige Abbildung $\bar{A}$ identisch. In diesem Fall heißt A maximal monoton genau dann, wenn A monoton ist, und aus $(u, u^*) \in X \times X^*$ sowie

$$\langle u^* - Av, u - v \rangle_X \geq 0 \qquad \forall v \in D(A)$$

folgt, dass $u \in D(A)$ und $u^* = Au$ gelten.

Die einfachsten Beispiele maximal monotoner Operatoren sind reelle Funktionen. Jede monoton wachsende, und möglicherweise unstetige, Funktion ist offensichtlich monoton. Ferner gilt

3.3 Lemma. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig. Dann ist f maximal monoton.*

Beweis : Sei $(u, u^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und es gelte für alle $v \in \mathbb{R}$

$$\big(u^* - f(v)\big)(u - v) \geq 0\,.$$

Es ist zu zeigen, dass $u^* = f(u)$ gilt, denn $u \in \mathbb{R}$ ist klar. Für $u > v$ haben wir $u^* - f(v) \geq 0$, d.h. $u^* \geq f(v)$. Wir wählen nun $v = u_n$, mit einer Folge (u_n), für die gilt: $u_n \nearrow u$. Die Stetigkeit von f impliziert $u^* \geq f(u)$. Für $u < v$ gilt $u^* \leq f(v)$. Wir wählen nun $v = u_n$, wobei (u_n) eine Folge ist mit $u_n \searrow u$. Die Stetigkeit von f liefert $u^* \leq f(u)$. Somit gilt sowohl $u^* \geq f(u)$ als auch $u^* \leq f(u)$, d.h. $u^* = f(u)$. ∎

Durch ein einfaches Gegenbeispiel überlegt man sich, dass unstetige monoton wachsende Funktionen nicht maximal monoton sein müssen. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0, \\ x+1 & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

d.h. f ist monoton wachsend, aber nicht stetig. Dann ist f nicht maximal monoton. Um dies zu beweisen wählen wir $(u, u^*) = (0, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und zeigen, dass für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$-(\frac{1}{2} - f(v))v \geq 0\,.$$

In der Tat, im Falle $v > 0$ haben wir $-(\frac{1}{2} - (v+1))v = (v + \frac{1}{2})v \geq 0$. Und im Falle $v \leq 0$ haben wir $(v - \frac{1}{2})v \geq 0$. Allerdings ist $f(0) = 0 \neq \frac{1}{2}$.

Analoge Aussagen erhalten wir auch für monotone Operatoren. Wir haben

3.4 Lemma. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A : X \to X^*$ ein monotoner, hemistetiger Operator. Dann ist $A : X \to X^*$ maximal monoton.*

Beweis : Sei $(u, u^*) \in X \times X^*$ und es gelte für alle $v \in X$

$$\langle u^* - Av, u - v\rangle \geq 0\,.$$

Wir setzen $v = u \pm tw$ mit $w \in X$ und $t > 0$. Dann folgt für alle $w \in X$

$$\mp t\langle u^* - A(u \pm tw), w\rangle \geq 0\,,$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} \langle u^* - A(u+tw), w\rangle &\leq 0, \\ \langle u^* - A(u-tw), w\rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Da A hemistetig ist, folgt im Grenzübergang $t \to 0^+$, dass für alle $v \in X$ gilt:

$$\langle u^* - Au, w\rangle = 0\,,$$

d.h. $u^* = Au$ ∎

- Die inverse Abbildung $A^{-1} : X^* \to 2^X$ einer maximal monotonen Abbildung $A : X \to 2^{X^*}$ auf einem reflexiven Banachraum X ist wieder maximal monoton, denn
$$G(A^{-1}) = \{(u^*, u) \in X^* \times X \,\big|\, (u, u^*) \in G(A)\}$$
und $\langle u^*, u\rangle_X = \langle u, u^*\rangle_{X^*}$ für alle $(u, u^*) \in X \times X^*$, da X reflexiv ist.

Subgradienten

Ein weiteres Beispiel maximal monotoner Operatoren sind *Subgradienten*, die den klassischen Begriff der Ableitung verallgemeinern.

3.5 Definition. *Sei X ein reeller Banachraum und $f : X \to [-\infty, \infty]$ ein Funktional auf X. Ein Element $u^* \in X^*$ heißt* ***Subgradient*** *von f an der Stelle $u \in X$ genau dann, wenn $f(u) \neq \pm\infty$ und*

$$f(v) \geq f(u) + \langle u^*, v - u \rangle \qquad\qquad \forall v \in X\,.$$

Die Menge aller Subgradienten von f in u heißt ***Subdifferential*** *$\partial f(u)$. Falls an der Stelle u kein Subgradient existiert, setzen wir $\partial f(u) = \emptyset$.*

Beispiel: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $\partial f(u)$ die Menge aller Anstiege von Geraden, die durch $(u, f(u))$ gehen und *vollständig* unter dem Graphen von f liegen. Sei z.B. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -bx & \text{für } x \leq 0\,, \\ \;\; ax & \text{für } x > 0\,, \end{cases}$$

$a,\, b \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $\partial f(0) = [-b, a]$. In der Tat, wenn wir die Ungleichung $f(v) \geq u^* v$ betrachten, so bemerken wir, dass für $v > 0$ die Ungleichung $av \geq u^* v$ impliziert, dass $a \geq u^*$ gilt und für $v < 0$ die Ungleichung $-bv \geq u^* v$ impliziert, dass $-b \leq u^*$ gilt. Also kann $f(v) \geq u^*$ für alle $v \in \mathbb{R}$ nur gelten, wenn $u^* \in [-b, a]$.

Falls $f'(u)$ und $\partial f(u)$ existieren, so ist $\partial f(u) = \{f'(u)\}$. Dies gilt nicht nur für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, sondern auch für reellwertige Funktionen auf Banachräumen. Im Zusammenhang mit dem Begriff der maximalen Monotonie ist es besonders fruchtbar, konvexe Funktionen zu betrachten. Denn aus der reellen Analysis wissen wir, dass f' monoton wachsend ist, sofern $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und stetig differnzierbar ist. Die letzten beiden Beobachtungen wollen wir nun genauer untersuchen.

3.6 Lemma. *Sei X ein reeller Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:*

(i) *Falls f konvex ist und eine Gâteaux–Ableitung $Df(u)$ im Punkt u besitzt, dann gilt:*
$$\partial f(u) = \{Df(u)\}. \tag{3.7}$$

(ii) *Umgekehrt, falls $\partial f\colon X \to X^*$ eindeutig und hemistetig ist, dann ist f Gâteaux–differenzierbar und (3.7) gilt für alle $u \in X$.*

Beweis : 1. Sei $h \in X$ beliebig. Wir setzen $\varphi(t) = f(u + th)$. Dann ist $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, denn aufgrund der Konvexität von f gilt:

$$\begin{aligned} \varphi\big((1-\tau)t + \tau s\big) &= f\big((\tau + (1-\tau))u + (1-\tau)th + \tau sh\big) \\ &\leq (1-\tau)f(u + th) + \tau f(u + sh) \\ &= (1-\tau)\varphi(t) + \tau\varphi(s)\,. \end{aligned}$$

Da f Gâteaux–differenzierbar ist, existiert $\varphi'(0)$. Dies und die Konvexität von φ liefern

$$\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0)$$

(vgl. z.B. [9, S. 165]). Setzen wir die Definition von φ und der Gâteaux–Differenzierbarkeit ein, ergibt sich für alle $h \in X$

$$f(u+h) - f(u) \geq \langle Df(u), h \rangle \,,$$

d.h. nach der Definition des Subgradienten gilt $Df(u) \in \partial f(u)$. Sei nun $u^* \in \partial f(u)$. Dann gilt für alle $h \in X$ und $t > 0$

$$f(u+th) - f(u) \geq \langle u^*, th \rangle \,,$$

was man umschreiben kann als

$$\frac{f(u+th) - f(u)}{t} \geq \langle u^*, h \rangle \,, \qquad \forall h \in X.$$

Im Grenzübergang $t \to 0^+$ folgt

$$\langle Df(u), h \rangle \geq \langle u^*, h \rangle, \qquad \forall h \in X \,,$$

da f Gâteaux–differenzierbar ist. Wir ersetzen h durch $-h$, und erhalten

$$\langle Df(u), h \rangle = \langle u^*, h \rangle \,, \qquad \forall h \in X \,,$$

d.h. wir haben gezeigt $Df(u) = u^*$. Zusammen mit dem vorher gezeigten folgt daher $\partial f(u) = \{Df(u)\}$.

2. Sei $t > 0$. Es gelten

$$\begin{aligned} f(u+th) - f(u) &\geq \langle \partial f(u), th \rangle, \\ f(u) - f(u+th) &\geq -\langle \partial f(u+th), th \rangle, \end{aligned}$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} \langle \partial f(u), h \rangle &\leq \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(u+th) - f(u)}{t} \\ &\leq \limsup_{t \to 0^+} \frac{f(u+th) - f(u)}{t} \\ &\leq \limsup_{t \to 0^+} \langle \partial f(u+th), h \rangle \\ &= \langle \partial f(u), h \rangle, \end{aligned}$$

da $\partial f(u)$ hemistetig ist. Also sind alle Ungleichheitszeichen Gleichheitszeichen. Daher existiert $Df(u)$ und (3.7) gilt. ∎

3.8 Lemma. *Sei $f : X \to (-\infty, \infty]$ ein Funktional auf einem reellen Banachraum X mit $f \not\equiv \infty$. Dann ist u eine Lösung des Minimierungsproblems*

$$f(u) = \min_{v \in X} f(v), \qquad u \in X\,,$$

genau dann, wenn

$$0 \in \partial f(u).$$

Beweis : 1. Sei $0 \in \partial f(u)$. Nach Definition des Subgradienten gilt für alle $v \in X$ und $u^* \in \partial f(u)$

$$f(v) - f(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle.$$

Wenn wir $u^* = 0$ einsetzen erhalten wir, dass für alle $v \in X$ gilt: $f(u) = f(v)$.
2. Es gelte $f(u) \leq f(v)$ für alle $v \in X$. Somit gilt für alle $v \in X$

$$f(v) - f(u) \geq 0 = \langle 0, v - u \rangle,$$

d.h. $0 \in \partial f(u)$. ■

Beispiel: Sei X ein reeller Banachraum und $C \subseteq X$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge mit der **Indikatorfunktion** χ, definiert durch

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & \text{für } u \in C, \\ \infty & \text{für } u \in X \setminus C. \end{cases}$$

Unter einem **Trägerfunktional** von C im Punkt u verstehen wir ein Funktional $u^* \in X^*$, so dass für alle $v \in C$ gilt:

$$\langle u^*, u - v \rangle \geq 0. \tag{3.9}$$

• Im Allgemeinen beschreibt, für ein gegebenes Paar $(u, u^*) \in X \times X^*$, die Gleichung

$$\langle u^*, u - v \rangle = 0 \qquad v \in X$$

eine abgeschlossene *Hyperebene* H in X durch den Punkt u, d.h. obige Bedingung besagt, dass C auf einer Seite der Hyperebene H liegt.
• Zwischen der Indikatorfunktion und dem Trägerfunktional gibt es folgende Beziehung:

$$\partial\chi(u) = \begin{cases} \text{Menge aller Trägerfunktionale} & \text{für } u \in C\,, \\ \emptyset & \text{für } u \in X \setminus C\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Nach der Definition des Subgradienten ist $u^* \in \partial\chi(u)$, falls für alle $v \in X$ gilt:

$$\chi(v) \geq \chi(u) + \langle u^*, v - u \rangle.$$

Für $u \in C$ folgt daraus $0 \leq \langle u^*, u - v \rangle$, falls $v \in C$. Demzufolge ist nach Definition u^* ein Trägerfunktional. Falls dagegen $u \in X \setminus C$, dann ist $\chi(u) = \infty$ und damit $\partial f(u) = \emptyset$ nach Definition 3.5.

• Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} u \in C \quad &\Rightarrow \quad 0 \in \partial\chi(u)\,, \\ u \in \operatorname{int} C \quad &\Rightarrow \quad \partial\chi(u) = \{0\}\,. \end{aligned}$$

In der Tat ist für $u \in C$ die Ungleichung $0 \le \langle u^*, u - v\rangle$ sogar für alle $v \in X$ erfüllt, wenn man $u^* = 0$ setzt. Falls $u \in \operatorname{int} C$, dann gilt für $u^* \in \partial\chi(u)$, dass $u^* = 0$. Denn zu $u \in \operatorname{int} C$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(u) \subseteq C$. Wir haben also für alle $w \in X$ mit $\|w\| = 1$, dass $v := u + \frac{r}{2}w \in C$. Aus (3.9) folgt dann

$$0 \le \langle u^*, u - (u + \frac{r}{2}w)\rangle = \frac{r}{2}\langle u^*, w\rangle\,.$$

Wir ersetzen w durch $-w$ und erhalten $0 \le -\frac{r}{2}\langle u^*, w\rangle$. Insgesamt folgt daher $0 = \langle u^*, w\rangle$ für alle $w \in X$ mit $\|w\| = 1$ und deshalb gilt $u^* = 0$.

3.11 Lemma. *Sei C eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines reellen Banachraumes X. Dann ist $\partial\chi \colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis : 1. $\partial\chi \colon C \to 2^{X^*}$ ist monoton: Seien (u, u^*), $(v, v^*) \in \partial\chi$, d.h. $u, v \in D(\partial\chi) = C, u^* \in \partial\chi(u), v^* \in \partial\chi(v)$, dann gilt für alle $w \in C$

$$\begin{aligned} \langle u^*, u - w\rangle \ge 0, \\ \langle v^*, v - w\rangle \ge 0, \end{aligned}$$

und somit

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle = \langle u^*, u - v\rangle + \langle v^*, v - u\rangle \ge 0\,,$$

d.h. $\partial\chi$ ist monoton.

2. $\partial\chi$ ist maximal monoton: Sei $(u, u^*) \in C \times X^*$, und es gelte für alle $(v, v^*) \in \partial\chi$, d.h. $v \in C, v^* \in \partial\chi(v)$

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \ge 0.$$

Nun ist aber $0 \in \partial\chi(v)$. Für $v^* = 0$ erhalten wir

$$\langle u^*, u - v\rangle \ge 0,$$

d.h. $u^* \in \partial\chi(u)$. ■

Die Frage ist, ob $\partial\chi \colon X \to 2^{X^*}$ ebenfalls maximal monoton ist. Dazu benötigen wir folgenden Satz:

3.12 Satz (Rockafellar, 1966). *Sei $f \colon X \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalbstetig auf dem reellen, reflexiven Banachraum X und sei $f \not\equiv +\infty$. Dann ist $\partial f \colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis : 1. $\partial f \colon X \to 2^{X^*}$ ist monoton: Seien (u, u^*), $(v, v^*) \in \partial f$, d.h. $u, v \in X, u^* \in \partial f(u)$, $v^* \in \partial f(v)$. Dann gilt nach Definition des Subdifferentials

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &\ge \langle u^*, v - u\rangle \qquad \forall v \in X\,, \\ f(u) - f(v) &\ge \langle v^*, u - v\rangle \qquad \forall u \in X\,. \end{aligned}$$

Eine Addition beider Ungleichungen ergibt

$$0 \geq \langle u^* - v^*, v - u\rangle \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq \langle u^* - v^*, u - v\rangle.$$

2. $\partial f : X \to 2^{X^*}$ ist maximal monoton: Sei $(u_0, u_0^*) \in X \times X^*$ so, dass für alle $(u, u^*) \in \partial f$ gelte

$$\langle u_0^* - u^*, u_0 - u\rangle \geq 0. \tag{3.13}$$

Zu zeigen ist jetzt, dass daraus $u_0^* \in \partial f(u_0)$ folgt, denn dann ist ∂f maximal monoton. Um dies zu beweisen benötigen wir folgendes Lemma.

3.14 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.12 existiert ein strikt monotoner Operator $J: X \to X^*$, so dass $R(J + \partial f) = X^*$.*

Der Beweis des Lemmas, der das Herzstück des Satzes 3.12 ist, benutzt tiefe Zusammenhänge zwischen *Konvexitätseigenschaften* von X und *Glattheitseigenschaften* der Norm auf X. Unter anderen benötigen wir für den Beweis, dass die Abbildung $u \mapsto \frac{1}{2}\|u\|_X^2$ in $X \setminus \{0\}$ Fréchet–differenzierbar ist. Dies ist nicht selbstverständlich. Zum Beispiel ist die Maximumsnorm auf dem $\mathbb{R}^2$ nicht überall differenzierbar. Das sieht man leicht, wenn man die Formel

$$\|z\|_\infty = \max(|x|, |y|) = \frac{1}{2}\Big(|x| + |y| + \big||y| - |x|\big|\Big)$$

für $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ verwendet. Der Gradient der Funktion $z \mapsto \|z\|_\infty$ ergibt sich formal als

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x|}\Big(1 - \frac{|y| - |x|}{\big||y| - |x|\big|}\Big), \frac{y}{|y|}\Big(1 + \frac{|y| - |x|}{\big||y| - |x|\big|}\Big)\right)$$

und ist somit in den Punkten $(x, \pm x), x \in \mathbb{R}$ nicht definiert.
Ein rigoroser Beweis des Lemmas würde den Rahmen sprengen, deshalb beschreiben wir im Folgenden nur das formale Vorgehen. Ein genauerer Beweis findet sich in [16, S. 397].
Beweis (Skizze): Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$\inf_{u \in X} \varphi(u) = \beta, \tag{3.15}$$

mit $\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + f(u) - \langle u^*, u\rangle$, wobei $u^* \in X^*$ beliebig aber fest ist. Wir setzen nun

$$J(u) \equiv (\frac{1}{2}\|u\|_X)'.$$

Die Existenz dieser Fréchet–Ableitung muss gezeigt werden. Dafür wird X mit einer äquivalenten Norm versehen, so dass X strikt konvex ist und somit die Ableitung der Norm auf $X\setminus\{0\}$ existiert (vgl. [Zeidler III, S. 247]). Aufgrund der strikten Konvexität der Norm sieht man leicht, dass J strikt monoton ist. Somit erhalten wir

$$\partial\varphi(u) = J(u) + \partial f(u) - u^*$$

(In diesem Schritt wird die Summenregel für das Subdifferential angewandt, die nicht immer gilt und die wir nicht beweisen wollen.) Man kann zeigen, dass φ folgende Eigenschaften hat (vgl : [16, S. 389])

a) $\varphi(u)$ ist koerziv, d.h. $\varphi(u) \to \infty$ für $\|u\| \to \infty$. Diesen Beweis lassen wir ebenfalls aus (vgl. [16, S. 382]).

b) φ ist unterhalbstetig und konvex, da es die Summme von Funktionalen mit diesen Eigenschaften ist.

Aus **FA I, Lemma 3.8.4** folgt, dass das Minimierungsproblem (3.15) eine Lösung besitzt. Nach Lemma 3.8 ist daher $0 \in \partial\varphi(u)$. Somit gilt

$$u^* = J(u) + \partial f(u),$$

d.h. $R(J + \partial f) = X^*$, da u^* beliebig gewählt war. ∎

Wir fahren nun fort mit dem Beweis, dass ∂f maximal monoton ist. Dazu benutzen wir den Operator J aus Lemma 3.14. Wir wissen, dass $J(u_0) + u_0^* \in X^*$ ist. Da $R(J + \partial f) = X^*$ gilt, erhalten wir, dass $(u, u^*) \in \partial f$ existieren mit

$$J(u) + u^* = J(u_0) + u_0^* \qquad \Leftrightarrow \qquad u_0^* - u^* = J(u) - J(u_0). \tag{3.16}$$

Die Ungleichung (3.13) liefert

$$0 \leq \langle u_0^* - u^*, u_0 - u\rangle = \langle J(u) - J(u_0), u_0 - u\rangle,$$

d.h. $\langle J(u_0) - J(u), u_0 - u\rangle \leq 0$. Der Operator J ist aber strikt monoton, d.h. für $u \neq u_0$ muss gelten $\langle J(u_0) - J(u), u_0 - u\rangle > 0$. Deshalb folgt $u = u_0$, und (3.16) impliziert, dass

$$u^* = u_0^* \in \partial f(u) = \partial f(u_0),$$

d.h. ∂f ist maximal monoton. ∎

Satz 3.12 verwenden wir nun, um unsere Frage nach der maximalen Monotonie von $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$ zu beantworten.

3.17 Lemma. *Sei C eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines reellen, reflexiven Banachraumes X und $\chi\colon X \to (-\infty, \infty]$ seine Indikatorfunktion. Dann ist $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis : Wir überprüfen, dass χ die Voraussetzungen von Satz 3.12 erfüllt.
1. Nach Definition der Indikatorfunktion nimmt χ nur die Werte 0 und ∞ an, d.h. $\chi\colon X \to (-\infty, \infty]$.
2. χ ist konvex: Da C konvex ist, gilt für $u, v \in C$

$$\chi\big((1-t)u + tv\big) = 0 = 0 + 0 = (1-t)\chi(u) + t\chi(v).$$

Falls $u \notin C$ und/oder $v \notin C$, gilt offensichtlich

$$\chi\big((1-t)u + tv\big) \leq \infty = (1-t)\chi(u) + t\chi(v).$$

3. χ ist unterhalbstetig: Die Unterhalbstetigkeit ist nämlich äquivalent zur Bedingung, dass $\chi^{-1}((-\infty, r])$ für alle $r \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Nun ist

$$\chi^{-1}((-\infty, r]) = \{u \,|\, \chi(u) \leq r\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } r < 0, \\ C, & \text{falls } r \geq 0. \end{cases}$$

Die leere Menge $\emptyset$ ist abgeschlossen und C ebenfalls nach Voraussetzung; also ist χ unterhalbstetig.

Also erfüllt χ die Vorraussetzungen von Satz 3.12 und somit ist $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton. ∎

Zeitableitungen

In der modernen Mathematik werden bei der Untersuchung von parabolischen Differentialgleichungen und Evolutionsgleichungen die Ort– und Zeitvariablen unterschiedlich behandelt. Was heißt das?
In Gleichungen dieser Art ist die Unbekannte eine Funktion $u \in X$, wobei X ein Funktionenraum ist, dessen Elemente auf $I \times \Omega$ definiert sind, d.h. $u\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}$. Nun kann man u durch die Vorschrift

$$[\mathbf{u}(t)](x) := u(t,x)$$

mit einer Abbildung $\mathbf{u}\colon I \to Y$ assoziieren, wobei Y ein Funktionenraum ist, dessen Elemente nur auf Ω definiert sind. Somit können wir also $\mathbf{u}(t)\colon \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto u(t,x)$, als ein Element eines Funktionenraumes interpretieren. Damit haben wir zwei Sichtweisen für u: Einmal kann man u als Funktion in Ort und Zeit betrachten, andererseits als Funktion in der Zeit mit Werten in einem Funktionenraum. Im Weiteren werden wir die zweite Sichtweise benutzen.

Beispiel: Für $u \in L^p(Q_T)$, $Q_T = (0,T] \times \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, gilt

$$\infty > \|u\|^p_{L^p(Q_T)} = \int_0^T \int_\Omega |u(t,x)|^p \, dx \, dt = \int_0^T \|u(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \, dt.$$

Aus dem Satz von Fubini folgt daher, dass für fast alle $t \in (0,T]$ gilt:

$$\int_\Omega |u(t,x)|^p \, dx < \infty \, ,$$

d.h. $\mathbf{u}(t) \in L^p(\Omega)$ und $\mathbf{u} \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$ mit $\|\mathbf{u}\|^p_{L^p(0,T;L^p(\Omega))} = \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \, dt$.

Eine ausführliche Darstellung der Theorie von *verallgemeinerten Zeitableitungen* kann man z.B. in [8, Kapitel 4] oder Zeidler II/a finden. Hier beschränken wir uns auf einen Spezialfall.

Sei V ein Banachraum und H ein Hilbertraum mit $V \hookrightarrow H \cong H^* \hookrightarrow V^*$. Außerdem sei V dicht in H, d.h. $\overline{V}^{\|\cdot\|_H} = H$. Ein solches Tripel (V,H,V^*) heißt **Gelfand–Tripel**. Zum Beispiel ist $(W^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega), W^{-1,2}(\Omega))$ ein Gelfand–Tripel.
Wenn V Teil eines Gelfand–Tripels ist, dann gilt $\langle v,w\rangle_V = \langle w,v\rangle_V$ für alle $v,\, w \in V$, denn $v \in V \subseteq H \cong H^*$. Daher läßt sich v, ebenso wie w, als ein Funktional auf H auffassen. Damit gilt $\langle v,w\rangle = (v,w)_H = (w,v)_H = \langle w,v\rangle$.

3.18 Definition. *Sei $u \in L^p(0,T;V), 1 < p < \infty$ und (V,H,V^*) ein Gelfand–Tripel. Dann definieren wir die* ***verallgemeinerte Zeitableitung*** $\frac{du}{dt}$ *als ein Element des Raumes $L^{p'}(0,T;V^*)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, für das gilt:*

$$\int_0^T \langle \frac{du}{dt}(t), v\rangle_V \varphi(t)\, dt = -\int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t)\, dt \quad \forall v \in V\,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T;\mathbb{R})\,.$$

• Im allgemeinen ist $\frac{du}{dt}$ nicht mit der distributionellen Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ identisch. Die distributionelle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ ist nämlich auf Q_T definiert durch

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \varphi\, dx\, dt = -\int_0^T \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q_T).$$

Beide Ableitungen stimmen jedoch überein, falls $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in V liegt.

Im Folgenden bezeichnen wir mit für $I = (0,T)$

$$\begin{aligned} W &= \Big\{u \in L^p(I;V) \;\Big|\; \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I;V^*)\Big\}\,, \\ \|u\|_W &= \|u\|_{L^p(I;V)} + \Big\|\frac{du}{dt}\Big\|_{L^{p'}(I;V^*)}\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

W ist ein Banachraum. Dieser ist reflexiv, falls $1 < p < \infty$ und V reflexiv ist.

3.20 Lemma. *Sei (V,H,V^*) ein Gelfand–Tripel und sei W definiert wie in (3.19). Dann gilt die stetige Einbettung*

$$W \hookrightarrow C(I;H)\,,$$

und für alle $u \in W$ und alle $s,t \in I$ gilt:

$$\int_s^t \Big\langle \frac{du}{dt}(\tau)\,,\, u(\tau)\Big\rangle_V d\tau = \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2\,.$$

Beweis : 1. Der Beweis ist technisch und benutzt viele Approximationsargumente. Er findet sich z.B. in [8, S. 147] oder in [14, S. 422].

2. Das Resultat ist das Analogon zur folgenden Rechnung:

$$\int_s^t u'(t)u(t)\, dt = \int_s^t \frac{1}{2}(u^2(t))'\, dt = \frac{1}{2}|u(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s)|^2$$

für $u \colon I \to \mathbb{R}$ (siehe z.B. [8, S. 147] oder [14, S. 422]). ■