3.21 Lemma. *Sei (V, H, V^*) ein Gelfand–Tripel, und sei der Raum W definiert wie in (3.19). Ferner sei $L\colon D(L) \subseteq L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V^*)$, $I = (0,T)$, definiert durch*

$$\begin{aligned} Lu &= \frac{du}{dt}, \\ D(L) &= \{u \in W \mid u(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist L ein linearer maximal monotoner Operator auf $D(L)$.

Beweis : 1. L ist nach Definition linear.

2. L ist monoton: Seien u, $v \in D(L)$, dann gilt nach Lemma 3.20

$$\begin{aligned} \langle Lu - Lv, u - v\rangle_{L^p(I;V)} &= \Big\langle \frac{d(u-v)}{dt}, u - v\Big\rangle_{L^p(I;V)} \\ &= \int_0^T \Big\langle \frac{d(u-v)}{dt}, u - v\Big\rangle_V \, dt \\ &= \frac{1}{2}\|(u-v)(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(u-v)(0)\|_H^2 \\ &\geq 0\,, \end{aligned}$$

da u, $v \in D(L)$.

3. L ist maximal monoton: Sei $v \in L^p(I;V)$, $w \in L^{p'}(I;V^*)$, und es gelte für alle $u \in D(L)$

$$\langle w - Lu, v - u\rangle_{L^p(I;V)} = \int_0^T \langle w - Lu, v - u\rangle_V \, dt \geq 0\,. \tag{3.22}$$

Wir müssen zeigen, dass $v \in D(L)$ und $w = \frac{dv}{dt}$. Wir wählen $u = \varphi(t)z \in L^p(I;V)$ mit $\varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$, $z \in V$. Es gilt $u(0) = 0$ und $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)z \in L^{p'}(I;V^*)$, da $\varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$, und damit $u \in D(L)$. Außerdem erhalten wir

$$\langle Lu, u\rangle = \int_0^T \Big\langle \frac{du}{dt}, u\Big\rangle \, dt = \frac{1}{2}\Big(\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2\Big) = 0\,, \tag{3.23}$$

da $\varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$. Wenn wir u in (3.22) einsetzen und (3.23) benutzen, erhalten wir

$$0 \leq \int_0^T \langle w, v\rangle_V \, dt - \int_0^T \langle w, \varphi z\rangle_V - \langle \varphi' z, v\rangle_V \, dt + 0\,.$$

Nun gilt aber $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ für alle v, $w \in V$ und somit

$$0 \leq \int_0^T \langle w, v\rangle_V \, dt - \int_0^T \langle \varphi' v + \varphi w, z\rangle_V \, dt\,.$$

Da $z \in V$ aber beliebig war, gilt die Ungleichung auch für $-z$ und für λz, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig groß werden kann. Außerdem ist $\langle w, v\rangle$ unabhängig von z. Damit die Ungleichung für alle z richtig ist, muß daher gelten

$$\int\limits_0^T \varphi\langle w, z\rangle + \varphi'(v, z)_H\, dt = 0 \qquad \forall z \in V\,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})\,,$$

d.h. $w = \frac{dv}{dt}$ und somit erhalten wir $\frac{dv}{dt} \in L^{p'}(I; V^*)$, d.h. $v \in W$. Zu zeigen bleibt, dass $v \in D(L)$. Nach Voraussetzung gilt für alle $u \in D(L)$

$$\begin{aligned} 0 \le \langle Lv - Lu, v - u\rangle_{L^p(I,V)} &= \int\limits_0^T \Big\langle \frac{d(v-u)}{dt}, v - u\Big\rangle_V\, dt \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|v(T) - u(T)\|_H^2 - \|v(0) - u(0)\|_H^2\Big)\,, \end{aligned} \tag{3.24}$$

da $v \in W$. Wir wählen nun eine Folge $(a_n) \in V$ mit $a_n T \to v(T)$ in $H \quad (n \to \infty)$. Wir definieren $u_n(t) = a_n t$, $u_n \in D(L)$, setzen u_n in (3.24) ein, und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{1}{2}\Big(\|v(T) - u_n(T)\|_H^2 - \|v(0) - u_n(0)\|_H^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|v(T) - a_n T\|_H^2 - \|v(0)\|_H^2\Big)\,. \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daraus

$$0 \le -\frac{1}{2}\|v(0)\|_H^2\,,$$

d.h. $v(0) = 0$ und somit $v \in D(L)$. ■

Die Dualitätsabbildung

Wie wir gesehen haben ist die *Dualitätsabbildung* ein wichtiges Hilfsmittel in der Theorie maximal monotoner Operatoren.

3.25 Definition. *Sei X ein reeller Banachraum und $\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2$. Dann ist die **Dualitätsabbildung** $J : X \to 2^{X^*}$ definiert durch*

$$J(u) = \partial\varphi(u)\,.$$

3.26 Lemma. *Sei H ein reeller Hilbertraum und J die Dualitätsabbildung $J\colon H \to 2^{H^*}$. Dann bildet J auf einelementige Mengen ab und kann daher als Operator $J\colon H \to H^*$ aufgefaßt werden. Weiterhin ist J charakterisiert durch*

$$\langle J(u), v\rangle_H = (u, v)_H\,.$$

Beweis : Nach Lemma 3.6 ist $\partial\varphi(u)$ einelementig, falls φ konvex ist und eine Gâteaux–Ableitung $D\varphi(u)$ besitzt.
1. φ ist konvex: Sei $t \in [0,1]$. Dann gilt für $u,\, v \in H$

$$\begin{aligned}
\varphi(tu+(1-t)v) &= \frac{1}{2}\|tu+(1-t)v\|^2 \\
&\le \frac{1}{2}\big(t\|u\|+(1-t)\|v\|\big)^2 \\
&\le \frac{1}{2}t^2\|u\|^2+\frac{1}{2}(1-t)^2\|v\|^2+t(1-t)\Big(\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\|v\|^2\Big) \\
&\le \frac{1}{2}t\|u\|^2+\frac{1}{2}(1-t)\|v\|^2 = t\varphi(u)+(1-t)\varphi v,
\end{aligned}$$

da $ab \le \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$.
2. φ besitzt eine Gâteaux–Ableitung: Für $t \in \mathbb{R}$ und $v \in H$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(u+tv) &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u+tv\|^2\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}(u,u)+t(u,v)+\frac{1}{2}t^2(v,v)\Big) \\
&= (u,v)+t(v,v).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Gâteaux–Ableitung existiert und dass gilt:

$$\langle D\varphi(u),v\rangle = \frac{d}{dt}\varphi(u+tv)|_{t=0} = (u,v)\,.$$

Die Charakterisierung von J folgt aus der Gleichungskette

$$\langle J(u),v\rangle = \langle\partial\varphi(u),v\rangle = \langle D\varphi(u),v\rangle = (u,v).$$

■

3.27 Lemma. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum. Dann ist die Dualitätsabbildung $J\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis : Nach Satz 3.12 ist J maximal monoton, wenn $\varphi\colon X \to (-\infty,\infty]$ konvex und unterhalbstetig ist, sowie $\varphi \not\equiv \infty$ gilt. Offensichtlich gilt: $\varphi\colon X \to (-\infty,\infty) \subseteq (-\infty,\infty]$. Die Konvexität von φ wurde bereits im Beweis von Lemma 3.26 gezeigt. Da φ stetig ist, ist φ auch unterhalbstetig. ■

Der Satz von Browder

Ähnlich wie in den vorangegangenen Abschnitten wollen wir die Lösbarkeit von

$$b \in Au+Bu\,, \qquad u \in C\,, \tag{3.28}$$

untersuchen, wobei $A\colon C \subseteq X \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist und $B\colon C \to X^*$ pseudomonoton. Die Beziehung (3.28) bedeutet, wenn A, B mehrdeutige Abbildungen sind, dass wir für gegebenes $b \in X^*$ ein $u \in C$ suchen, so dass gilt

$$b = v+w\,, \qquad \text{mit } v \in Au\,,\ w \in Bu.$$

Wenn A und B Operatoren sind, dann ist (3.28) äquivalent zu

$$b = Au + Bu, \qquad u \in C.$$

3.29 Satz (Browder, 1968). *Sei $C \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge eines reellen, reflexiven Banachraumes X. Sei $A\colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton und $B\colon C \to X^*$ pseudomonoton, beschränkt und demistetig. Falls C unbeschränkt ist, sei B koerziv bezüglich A und eines festen Elements $b \in X^*$, d.h. es existiert ein Element $u_0 \in C \cap D(A)$, und eine Zahl $r > 0$ so, dass*

$$\langle Bu, u - u_0\rangle > \langle b, u - u_0\rangle, \qquad \forall u \in C \text{ mit } \|u\| > r$$

Dann existiert für dieses $b \in X^*$ eine Lösung $u \in C \cap D(A)$ des Problems (3.28).

Beweis : Die Strategie, die diesem Beweis zugrunde liegt, ist folgende:

- Galerkin–Approximation; aber diesesmal führen wir sie nicht mit Gleichungen sondern mit Ungleichungen durch.
- Lösbarkeit der Galerkin–Ungleichungen; hierzu verwenden wir ein Abschneide–Argument.
- Apriori–Schranken für die Lösung der Galerkin–Ungleichungen; diese folgen aus der Koerzivität von B.
- Konvergenz der Galerkin–Methode; diese basiert auf der Pseudomonotonie von B.

Da $A\colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist und C nichtleer, ist der Graph von A nicht leer. In der Tat, angenommen er sei leer, dann ist die Bedingung

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall (v, v^*) \in A$$

für $(u, u^*) \in C \times X^*$ erfüllt, da der Graph von A leer ist. Daraus folgt $(u, u^*) \in A$, da A maximal monoton ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Also existiert $(u_0, u_0^*) \in A$.
O.E.d.A. sei $u_0 = 0$ und $u_0^* = 0$, d.h. $(0, 0) \in A$. Ansonsten gehen wir vom Problem

$$b \in Au + Bu, \qquad\qquad u \in C\,,$$

über zu

$$b - u_0^* \in \bar{A}v + \bar{B}v, \qquad\qquad v \in C - u_0,$$

wobei $\bar{A}v := A(v + u_0)$ und $\bar{B}v := B(v + u_0) - u_0^*$ auch die Voraussetzungen des Satzes erfüllen.
1. Äquivalente Variationsungleichung: Wir suchen ein $u \in C$ mit:

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall (v, v^*) \in A. \tag{3.30}$$

Dieses Problem ist äquivalent zu unserem ursprünglichen Problem (3.28). Wenn nämlich $u \in C$ die Ungleichung (3.30) löst, dann folgt aus der maximalen Monotonie von A, dass $b - Bu \in Au$, d.h. $b \in Au + Bu$, und insbesondere $u \in D(A)$. Falls umgekehrt u eine Lösung von (3.28) ist, dann ist $b - Bu \in Au$ und die Ungleichung gilt wegen der Monotonie von A.

2. Apriori–Schranke: Sei $u \in C$ eine Lösung (3.30). Da $(0,0) \in A$ gilt

$$\langle b - Bu, u\rangle \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle Bu - b, u\rangle \leq 0.$$

Andererseits ist B koerziv bezüglich A und b mit $u_0 = 0$. Daher gibt es ein $r > 0$ mit $\langle Bu - b, u\rangle > 0$ für alle $\|u\| > r$. Diese und die obige Ungleichung liefern

$$\|u\| \leq r, \tag{3.31}$$

falls $u \in C$ eine Lösung von (3.30) ist.

3. Galerkin–Ungleichung: Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}$ die Menge aller endlichdimensionalen linearen Unterräume Y von X. Wir wählen ein festes $Y \in \mathcal{L}$. Anstelle von (3.30) betrachten wir das approximative Problem: Wir suchen $u_Y \in C \cap Y$, dass die Ungleichung

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v\rangle_Y \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in C \cap Y \tag{3.32}$$

löst. Beachte in diesem Zusammenhang, dass aus $Y \subseteq X$ die Relation $X^* \subseteq Y^*$ folgt. Dies ist so zu verstehen, dass für $v^* \in X^*$ die Einschränkung auf $Y \subseteq X$ sofort ein Element aus Y^* liefert, d.h. die Dualitätsprodukte auf beiden Räumen werden miteinander identifiziert, und es gilt $\langle v^*, v\rangle_Y := \langle v^*, v\rangle_X$ für alle $v \in Y$.

4. Lösung von (3.32): Wir müssen eien weitere Approximation des Problems (3.32) durchführen.

a) Lösung des abgeschnittenen Problems: Wir setzen für $R > 0$

$$\begin{aligned} K_R &= \{v \in C \cap Y \,\big|\, \|v\|_X \leq R\}, \\ G_R &= \{(v, v^*) \in A \,\big|\, v \in K_R\}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass beide Mengen nichtleer sind, da $(0,0) \in A$. Wir approximieren (3.32) durch das *abgeschnittene Problem*: Suche $u_R \in K_R$:

$$\langle b - Bu_R - v^*, u_R - v\rangle_Y \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in G_R. \tag{3.33}$$

Auf das Problem (3.33) wollen wir Satz 1.2.26 anwenden. Dazu setzen wir:

α) $K = K_R$: K ist eine kompakte, konvexe Teilmenge von Y mit $\dim Y < \infty$.

β) $M = G_R$: Der Operator A ist monoton, da A maximal monoton ist. Damit ist auch die Menge M monoton.

γ) $T\colon K \to X^* : u \mapsto b - Bu$: T ist stetig, da B demistetig ist, d.h. aus $u_n \to u\,(n \to \infty)$, folgt $Bu_n \rightharpoonup Bu, (n \to \infty)$. Wir betrachten aber B eingeschränkt auf Y, d.h. $B\colon C \cap Y \to X^* \subseteq Y^*$ mit $\dim Y^* < \infty$. In endlichdimensionalen Räumen impliziert schwache Konvergenz aber starke Konvergenz, da man den endlichdimensionalen Raum nach Basiswahl mit $\mathbb{R}^n$

identifizieren kann, und damit aus der schwachen Konvergenz die komponentenweise Konvergenz folgt. Also gilt in unserem Fall $Bu_n \to Bu$, d.h. T ist stetig.

Nach Satz 1.2.26 hat das abgeschnittene Problem (3.33) demnach eine Lösung $u_R \in K_R$.

b) Lösung der Galerkin–Ungleichung (3.32): Wir setzen

$$\mathcal{S}_R = \{u_R \in K_R \,\big|\, u_R \text{ ist eine Lösung von (3.33)}\},$$

d.h. $\mathcal{S}_R \subseteq K_R$ für alle $R > 0$. Aus der Koerzivität von B bezüglich A und b (vgl. Schritt 2.) folgt:

$$\|u_R\| \le r, \tag{3.34}$$

wobei r unabhängig von R und $Y \in \mathcal{L}$ ist. Die Menge $\mathcal{S}_R$ hat folgende Eigenschaften:

α) $\mathcal{S}_R$ liegt in der kompakten Menge $K_R = \{u \in C \cap Y \,\big|\, \|u\| \le R\}$.

β) $\mathcal{S}_R$ ist abgeschlossen, da B demistetig ist.

γ) $\mathcal{S}_{R'} \subseteq \mathcal{S}_R$ für alle R', R mit $R' \ge R \ge r$, da für $R' \ge R \ge r$ gilt: $G_R \subseteq G_{R'}$.

Für eine Folge $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ bilden also S_{R_n} eine absteigende Folge kompakter Mengen und somit (siehe auch endliches Durchschnittsprinzip (3.36)) folgt die Existenz eines Elements u_Y mit

$$u_Y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{R_n}\,.$$

Aus (3.34) und der Definition von $K_R \subseteq C$ erhalten wir sofort

$$\|u_Y\| \le r \qquad \text{und} \qquad u_Y \in C\,. \tag{3.35}$$

Außerdem ist u_Y eine Lösung von (3.32), denn für $(v, v^*) \in A, v \in C \cap Y$ gilt: Es existiert ein R_{n_0}, so dass $\|v\| \le R_{n_0}$. Damit ist u_Y eine Lösung von (3.33) für R_{n_0}. Da aber u_Y für alle $R_n\,(n \to \infty)$ in $\mathcal{S}_{R_n}$ liegt und v beliebig gewählt war, erhalten wir

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v\rangle \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in C \cap Y.$$

5. Konvergenz der Galerkin-Lösungen u_Y: Wir wollen erreichen, dass "$u_Y \to u$" in einem gewissem Sinne, wobei u eine Lösung von (3.30) ist. Hierbei tritt das Problem auf, dass Pseudomonotonie nur über (abzählbare) Folgen definiert ist. Das System $\mathcal{L}$ ist aber überabzählbar. Also ist eine weitere Approximation nötig:

a) Endliches Durchschnittsprinzip: Seien $Y, Z \in \mathcal{L}$. Wir setzen

$$M_Z = \{(u_Y, Bu_Y) \in C \times X^* \,\big|\, u_Y \text{ Lösung von (3.32) mit } Y \supseteq Z\}\,.$$

Wir wollen zeigen, dass es ein Element

$$(u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M_Z}^{w}$$

gibt, wobei $\overline{M}_Z^w$ der Abschluß von M_Z in $X \times X^*$ bezüglich der schwachen Topologie sei. Dieses u wird die gesuchte Lösung sein. Wir beweisen nun die Existenz eines solchen Paare (u, u^*).

Da nach (3.35) $\|u_Y\| \le r$ für alle $Y \in \mathcal{L}$ gilt und $B\colon X \to X^*$ beschränkt ist, ist die Menge $B(B_r)$ auch beschränkt. Also gibt es einen abgeschlossenen Ball $K \subseteq X \times X^*$, so dass

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} M_Z \subseteq K.$$

Da X reflexiv ist, sind es auch X^* und $X \times X^*$. Da K stark abgeschlossen und konvex ist, ist K auch schwach abgeschlossen (vgl. [2, Satz 5.10, S. 166]). Daher folgt insgesamt, dass K schwach kompakt ist. Nun ist aber für alle $Z \in \mathcal{L}$ die Menge $\overline{M}_Z^w$ schwach abgeschlossen und es gilt: $\overline{M}_Z^w \subseteq K$. Demzufolge ist $\overline{M}_Z^w$ schwach kompakt, und

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z^w \subseteq K.$$

Seien nun $Y, Z \in \mathcal{L}$. Wir setzen $S = \operatorname{span}\{Y, Z\}$ und erhalten $M_Y \cap M_Z \supseteq M_S$. In der Tat, sei $(u_S, Bu_S) \in M_S$. Dann ist u_S eine Lösung von (3.32) in einem Raum $U \supseteq S = \operatorname{span}\{Y, Z\} \supseteq Y$ und $U \supseteq S \supseteq Z$. Das bedeutet aber $(u_S, Bu_S) \in M_Z \cap M_Y$. Wiederholen wir dieses Argument endlich oft, erhalten wir

$$\bigcap_{i=1}^{N} \overline{M}_{Y_i}^w \neq \emptyset \qquad\qquad \forall N\,,\ \forall Y_i \in \mathcal{L}.$$

Aus dem endlichen Durchschnittsprinzip folgt somit

$$\exists (u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z^w. \tag{3.36}$$

Das *endliche Durchschnittsprinzip* besagt: Eine Menge K ist kompakt genau dann, wenn jedes *zentrierte* System von in K abgeschlossenen Mengen einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Ein System $A_i, i \in I$, heißt *zentriert*, wenn der Durchschnitt beliebiger endlicher Teilsysteme $A_{i_k}, k = 1, \dots, N$, nichtleer ist.

b) Konstruktion eines speziellen Paares $(v_0, v_0^*) \in A$: Es existiert $(v_0, v_0^*) \in A$ so, dass gilt:

$$\langle b - u^* - v_0^*, u - v_0 \rangle \le 0. \tag{3.37}$$

Sei dem nicht so, dann gilt für alle $(v, v^*) \in A$:

$$\langle b - u^* - v^*, u - v \rangle > 0.$$

Da A maximal monoton ist, folgt $b - u^* \in Au$. Wir können nun speziell $v = u$ und $v^* = b - u^*$ wählen und erhalten $\langle b - u^* - v^*, u - v \rangle = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also gilt (3.37).

c) Spezielle Approximation:

3.38 Lemma. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und $M \subseteq X$ sei beschränkt. Dann gibt es für alle $u \in \overline{M}^w$ eine Folge $u_n \subseteq M$ mit*

$$u_n \rightharpoonup u \qquad (n \to \infty)$$

Beweis : Der Beweis benutzt einige Tatsachen aus der Theorie topologischer Räume. Eine Anleitung zum Beweis findet sich in [15, S. 911]. ■

Wir wählen nun $Y \in \mathcal{L}$ fest: $\overline{M}_Y^w$ ist schwach abgeschlossen in $X \times X^*$, und $(u, u^*) \in \overline{M}_Y^w$ wegen (3.36). Nach obigem Lemma gibt es $(u_n, u_n^*) \in M_Y$ mit $(u_n, u_n^*) \rightharpoonup (u, u^*)$ in $X \times X^*$ $(n \to \infty)$. Nach Konstruktion von M_Y ist $u_n^* = Bu_n$ und insbesondere $u_n \in C$. Die Menge C ist abgeschlossen und konvex, also schwach abgeschlossen, daher ist auch $u \in C$. Demnach gibt es eine Folge (u_n) in C, so dass

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \qquad && \text{in } X \\ Bu_n &\rightharpoonup u^* \qquad && \text{in } X^* \end{aligned} \qquad (n \to \infty)\,, \tag{3.39}$$

und

$$\langle b - Bu_n - v^*\,,\ u_n - v\rangle \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C, \tag{3.40}$$

denn die u_n liegen in M_Y, und Elemente von M_Y sind Lösungen von (3.32).

d) Pseudomonotonie von B: Wir wollen zeigen, dass gilt

$$\langle Bu, u - v\rangle \leq \langle v^* - b, v - u\rangle \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C,$$

denn damit haben wir gezeigt, dass (3.30) und damit auch (3.28) für alle $v \in Y \cap C$ gilt. Wir beschränken uns dazu auf solche $Y \in \mathcal{L}$ mit $v_0 \in Y$, wobei v_0 das Element aus 5b) ist. Wir wählen ein festes beliebiges Y. Aus (3.40) folgt für alle $w \in C$, $(v, v^*) \in A, v \in Y \cap C$, und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\langle Bu_n, u_n - w\rangle \leq \langle b - v^*, u_n - v\rangle + \langle Bu_n, v - w\rangle. \tag{3.41}$$

Wir wählen insbesondere $w = v$. Was möglich ist, da $A\colon C \to 2^{X^*}$. Dann läßt sich (3.41) schreiben als

$$\langle Bu_n, u_n - v\rangle \leq \langle v^* - b, v - u_n\rangle \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C. \tag{3.42}$$

Nun wählen wir $w = u\,,\ v = v_0$ und $v^* = v_0^*$, und erhalten aus (3.41), wobei (v_0, v_0^*) das spezielle Paar aus c) ist,

$$\langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq \langle v_0^* - b, v_0 - u_n\rangle + \langle Bu_n, v_0 - u\rangle$$

und somit mit Hilfe von (3.37) und (3.39)

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq \langle v_0^* - b + u^*, v_0 - u\rangle \leq 0\,,$$

d.h. $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \le 0$. Da B pseudomonoton ist und $u_n \rightharpoonup u\,(n\to\infty)$, folgt mit Hilfe von (3.42) für alle $(v,v^*)\in A$, $v\in Y\cap C$

$$\begin{aligned}\langle Bu, u-v\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - v\rangle \\ &\le \langle v^* - b, v - u\rangle\,,\end{aligned}$$

d.h. für alle $(v,v^*)\in A$, und $v\in Y\cap C$ gilt

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle \ge 0.$$

Zu beliebigem $(v,v^*)\in A$ gibt es ein $Y\in\mathcal{L}$ mit $v\in Y$, denn $\bigcup\limits_{\substack{Y\in\mathcal{L}\\ v_0\in Y}} Y = X$. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle_X \ge 0 \qquad \forall (v,v^*)\in A\,,$$

d.h. $u\in C$ ist eine Lösung von (3.30).

■

• Die Voraussetzung von Satz 3.29 ist für alle $b\in X^*$ erfüllt, falls B **koerziv bezüglich** A ist, d.h. es existiert ein Element $u_0\in C\cap D(A)$ so, dass

$$\lim_{\substack{\|u\|\to\infty\\ u\in C}} \frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} = \infty\,. \tag{3.43}$$

Dann gibt es für alle $b\in X^*$ eine Lösung von (3.30), d.h. $R(A+B)=X^*$. Denn wir haben für $\|u\|>r$

$$\begin{aligned}\frac{\langle Bu-b, u-u_0\rangle}{\|u\|} &\ge \frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} - \frac{\|b\|\,\|u-u_0\|}{\|u\|} \\ &\ge \frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} - \|b\|\frac{\|u\|+\|u_0\|}{\|u\|} \\ &\ge \frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} - 2\|b\|\,.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung konvergiert gegen ∞ für $\|u\|\to\infty$. Somit gilt $\langle Bu, u-u_0\rangle > \langle b, u-u_0\rangle$ für alle $\|u\|\ge r$ mit r groß genug, d.h. die Bedingungen des Satzes 3.29 sind für alle $b\in X^*$ erfüllt.

Wir wollen nun zwei Anwendungen von Satz 3.29 darlegen

Variationsungleichungen

Gegeben sei ein Operator $A\colon C\to X^*$, wobei $C\subseteq X$ eine konvexe, abgeschlossene Menge ist und $b\in X^*$. Wir suchen ein $u\in C$, so dass

$$\langle b - Au, u - v\rangle \ge 0 \qquad \forall v\in C. \tag{3.44}$$