Eine äquivalente Formulierung von (3.44) ist: Suche ein $u \in C$, so dass

$$b \in \partial\chi(u) + Au\,, \tag{3.45}$$

wobei χ die Indikatorfunktion von C ist, d.h.

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & u \in C\,, \\ \infty & u \in X \setminus C\,. \end{cases}$$

Wir haben gezeigt, dass das Subdiffernential $\partial\chi$ gegeben ist durch:

$$\partial\chi(u) = \begin{cases} \{u^* \in X^* \,\big|\, \langle u^*, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in C\} & u \in C\,, \\ \emptyset & u \in X \setminus C. \end{cases}$$

Daher bedeutet $b \in \partial\chi(u) + Au$ mit $u \in C$, dass $b - Au \in \partial\chi(u)$ mit $u \in C$ oder äquivalent $\langle b - Au, u - v\rangle \geq 0$ für alle $v \in C$. Falls $X = C$, so ist (3.44) äquivalent zu $Au = b$.

3.46 Satz. *Sei $C \neq \emptyset$ eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge eines reellen, reflexiven Banachraumes X. Sei $A\colon C \to X^*$ pseudomonoton, demistetig und beschränkt. Falls C unbeschränkt ist, existiere ein $u_0 \in C$, so dass*

$$\frac{\langle Au, u - u_0\rangle}{\|u\|} \to \infty \qquad \text{für } \|u\| \to \infty\,, \qquad u \in C\,.$$

Dann gilt:

(i) *Für alle $b \in X$ gibt es eine Lösung u von (3.44).*

(ii) *Falls $A\colon C \to X^*$ monoton ist, ist die Lösungsmenge von (3.44) abgeschlossen und konvex.*

(iii) *Falls $A\colon C \to X^*$ strikt monoton ist, ist (3.44) eindeutig lösbar.*

Beweis : 1. Die Menge C ist konvex und abgeschlossen und daher ist die Indikatorfunktion χ konvex und unterhalbstetig (vgl. Lemma 3.17). Lemma 3.17 liefert dann, dass $\partial\chi : C \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist. Außerdem gilt für $u \in C$ dass $\partial\chi(u) \neq \emptyset$. In Satz 3.29 und in der Bemerkung nach diesem Satz wählen wir $A = \partial\chi$ und $B = A$. Dann existiert ein $u \in C$ so, dass

$$b \in \partial\chi(u) + Au\,.$$

Die ist aufgrund obiger Überlegungen äquivalent zur Existenz einer Lösung von (3.44).
2. Da $A\colon C \to X^*$ monoton ist, ist (3.44) äquivalent zu: Suche $u \in C$, so dass

$$\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in C. \tag{3.47}$$

In der Tat, sei u eine Lösung von (3.44), dann haben wir aufgrund der Monotonie von A

$$\begin{aligned} \langle Av, v - u\rangle &= \langle Au, v - u\rangle + \langle Av - Au, v - u\rangle \\ &\geq \langle Au, v - u\rangle \overset{(3.44)}{\geq} \langle b, v - u\rangle, \end{aligned}$$

d.h. u ist eine Lösung von (3.47). Sei umgekehrt u eine Lösung von (3.47). Wir setzen $v = (1-t)u + tw$, $w \in C$, $0 < t < 1$. Da C konvex ist, folgt $v \in C$. Die Ungleichung (3.47) impliziert daher

$$\langle b - A((1-t)u + tw)), u - w\rangle t \geq 0$$

oder äquivalent

$$\langle b - A((1-t)u + tw), u - w\rangle \geq 0.$$

Im Grenzübergang $t \to 0^+$ folgt, da A demistetig ist,

$$\langle b - Au, u - w\rangle \geq 0.$$

Das ist aber gerade (3.44).

3. Sei S die Lösungsmenge von (3.47) und seien $u, \bar{u} \in S$. Dann gilt für $w = (1-t)u + t\bar{u}$:

$$\begin{aligned}\langle b - Av, w - v\rangle &= \langle b - Av, (1-t)u + t\bar{u} - ((1-t)v + tv)\rangle \\ &= (1-t)\langle b - Av, u - v\rangle + t(\langle b - Av, \bar{u} - v\rangle \geq 0,\end{aligned}$$

aufgrund von (3.47), d.h. S ist konvex. Sei (u_n) eine Folge in S mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. Dann gilt:

$$\langle b - Av, u_n - v\rangle \geq 0.$$

Für $n \to \infty$ folgt $\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0$ und damit $u \in S$. Also ist S abgeschlossen.

4. Für $u, \bar{u} \in S$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle b - Au, u - v\rangle &\geq 0\,, \\ \langle b - A\bar{u}, \bar{u} - v\rangle &\geq 0\,.\end{aligned}$$

Wir setzen $v = \bar{u}$ in die 1. Ungleichung ein und $v = u$ in die 2. Ungleichung und addieren dann beide Ungleichungen. Dies ergibt

$$\langle -Au + A\bar{u}, u - \bar{u}\rangle \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle Au - A\bar{u}, u - \bar{u}\rangle \leq 0\,.$$

Da A strikt monoton ist, folgt daraus $u = \bar{u}$. ∎

Beispiel: Wir betrachten folgendes *Hindernisproblem*: Gesucht ist ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ so, dass

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \\ u &\geq g && \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{3.48}$$

wobei f, g gegebene Funktionen sind. Diese Gleichungen beschreiben das Verhalten einer elastischen Membran unter dem Einfluß einer Kraft f, falls die Bewegung durch ein Hindernis g beeinflußt wird. Wir setzen

$$\begin{aligned} C &= \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \,\big|\, u \geq g\}, \\ \langle Au, v\rangle &= \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v \, dx, \\ \langle b, v\rangle &= \int\limits_\Omega f v \, dx\,, \end{aligned}$$

und betrachten die folgende Variationsungleichung: Suche ein $u \in C$ mit

$$\langle b - Au, u - v\rangle \geq 0, \qquad \forall v \in C\,, \tag{3.49}$$

d.h. suche ein $u \in C$ mit

$$\int\limits_\Omega f(u-v)\, dx - \int\limits_\Omega \nabla u \nabla (u-v)\, dx \geq 0 \qquad \forall v \in C.$$

3.50 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert für alle $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in W^{1,2}(\Omega), g \leq 0$ auf $\partial\Omega$, genau eine Lösung $u \in C$ von* (3.49).

Beweis : 1. Die Menge C ist nichtleer, da für

$$v = \max(g, 0)$$

offensichtlich $v \geq g$ gilt und man zeigen kann, dass v zum Raum $W^{1,2}(\Omega)$ gehört. Offensichtlich ist C konvex. Die Menge C ist auch abgeschlossen, da für eine Folge $(u_n) \subseteq C$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,2}(\Omega)\,(n \to \infty)$ folgt, dass es eine Teilfolge gibt mit $u_{n_k}(x) \to u(x)$ fast überall in $\Omega\,(k \to \infty)$. Daraus folgt, dass auch $u \in C$.

2. Der Operator A ist stetig, strikt monoton und koerziv, wie wir in Lemma 1.29 gezeigt haben ($p = 2, s = 0$). Satz 3.46 liefert also sofort die Behauptung. ■

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen der Lösung der Variationsungleichung (3.49) und der Lösung unseres ursprünglichen Problems (3.48)? Falls die Lösung u und die Daten f, g glatt sind, dann erhalten wir, dass

$$O = \{x \in \Omega \,\big|\, u(x) > g(x)\}$$

offen ist und dass

$$A = \{x \in \Omega \,\big|\, u(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen ist. Wir setzen $v = u + \tau\varphi$ mit $\varphi \in C_0^\infty(O)$ und $|\tau|$ klein. Dann ist $v \in C$, und es folgt

$$-\tau \int\limits_\Omega f\varphi\, dx + \tau \int\limits_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \tau \int\limits_O \nabla u \nabla\varphi - f\varphi\, dx \geq 0.$$

Wir ersetzen τ durch $-\tau$, und erhalten insgesamt

$$\int_O f\varphi\, dx - \int_O \nabla u \nabla \varphi\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(O).$$

Daraus erhalten wir durch partielle Integration, dass

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } O\,.$$

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $0 < \tau \leq 1$. Wir setzen $v = u + \tau\varphi$. Dann ist $v \in C$ und es gilt

$$-\tau \int_\Omega f\varphi\, dx + \tau \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx \geq 0\,.$$

Partielle Integration der Gleichung ergibt

$$-\int_\Omega (f + \Delta u)\varphi\, dx \geq 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0,$$

d.h.

$$-\Delta u \geq f \qquad \text{in } \Omega\,.$$

Wir haben also gezeigt, dass eine glatte Lösung u der Variationsungleichung (3.49)das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &\geq f, \quad u \geq g && \text{in } \Omega\,, \\ -\Delta u &= f, \quad u > g && \text{in } O\,. \end{aligned}$$

löst.

Evolutionsprobleme

Betrachte für alle $t \in I = (0,T)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) &= b(t)\,, \\ u(0) &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Sei L definiert durch $Lu = \frac{du}{dt}$ mit

$$D(L) = \big\{ u \in W \,\big|\, u(0) = 0 \big\}\,,$$

wobei

$$W = \Big\{ u \in L^p(I;V) \,\Big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I;V^*) \Big\}\,,$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. Mithilfe von L schreibt sich (3.51) als

$$Lu + Au = b, \qquad u \in D(L). \tag{3.52}$$

3.53 Satz. *Sei (V, H, V^*) ein Gelfand–Tripel, und sei $X = L^p(I; V), 1 < p < \infty$, $I = (0, T)$, $T < \infty$. Sei $A\colon X \to X^*$ pseudomonoton, koerziv, demistetig und beschränkt. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in D(L)$ von (3.51). Falls A strikt monoton ist, ist diese eindeutig bestimmt.*

Beweis : 1. Existenz einer Lösung: Nach Lemma 3.21 ist L maximal monoton auf $D(L)$. Weiterhin ist $D(L)$ konvex und abgeschlossen in der Norm von W. Mit $C = D(L)$, $u_0 = 0$, $A = L$ und $B = A$ sind die Voraussetzungen von Satz 3.29 und der Bemerkung danach erfüllt. Daher gibt es ein $u \in D(L)$, das (3.52) löst.

2. Eindeutigkeit der Lösung: Seien u_1, $u_2 \in D(L)$ Lösungen von (3.52). Dann gilt

$$\begin{aligned} Lu_1 + Au_1 &= b\,,\\ Lu_2 + Au_2 &= b\,. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander, folgt mit Hilfe von Lemma 3.17

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle\\ &= \frac{1}{2}\Big(\|(u_1 - u_2)(T)\|_H^2 - \|(u_1 - u_2)(0)\|_H^2\Big) + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle\\ &\geq \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle. \end{aligned}$$

Da A strikt monoton ist, folgt daraus $u_1 = u_2$. ■

Quasilineare parabolische Gleichungen

Zur Illustration der allgemeinen Theorie betrachten wir nun folgendes Problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f && \text{in } \Omega \times I,\\ u &= 0 && \text{in } \partial\Omega \times I,\\ u(0) &= 0 && \text{in } \Omega\,, \end{aligned} \tag{3.54}$$

wobei f eine gegebene rechte Seite ist und g die Bedingungen (2.14) und (2.18) erfüllt. Wir bezeichnen mit $I = (0, T)$ ein Zeitintervall und setzen $V = W_0^{1,p}(\Omega), H = L^2(\Omega)$ und $X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$. Analog zum Falle quasilinearer elliptischer Gleichungen setzen wir:

$$\begin{aligned} \langle A_1 u, v\rangle_X &= \int_I \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\, dx\, dt\,,\\ \langle A_2 u, v\rangle_X &= \int_I \int_\Omega g(u) v\, dx\, dt\,. \end{aligned}$$

Wie wir in Lemma 1.29 ($s = 0$) gezeigt haben, ist der Operator A_1 „im stationären Fall“ stetig, monoton, beschränkt und koerziv. Weiterhin wissen wir aus Lemma 2.13, dass der Operator A_2 „im stationären Fall“ beschränkt und stark stetig ist, falls

$r \leq \frac{np}{n-p}$. In Lemma 2.17 wurde gezeigt, dass „im stationären Fall“ der Operator $A = A_1 + A_2$ pseudomonoton, koerziv, stetig und beschränkt ist.
Im hier vorliegenden „instationären Fall“ müssen wir einerseits zeigen, dass für den Operator $A\colon X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)) \to X^* = (L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)))^* = L^{p'}(I; (W_0^{1,p}(\Omega))^*)$, mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, gilt und andererseits überprüfen inwieweit sich die Eigenschaften der Operatoren „im stationären Fall“ auf den „instationären Fall“ übertragen lassen.

3.55 Lemma. *Sei $1 < p < \infty$ und $X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$. Dann bildet der Operator A_1 den Raum X in seinen Dualraum X^* ab.*

Beweis : Aus dem Beweis von Lemma 1.27 erhalten wir für alle $u, v \in X$ die Abschätzung

$$\int_I \langle A_1 u, v\rangle \, dt \leq C \int_I \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p} \, dt \leq \Big(\int_I \|\nabla u\|_{L^p}^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_I \|\nabla v\|_{L^p}^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Damit folgt $A_1\colon X \to X^*$. ∎

3.56 Lemma. *Für alle $1 < p < \infty$ ist der Operator $A_1\colon X \to X^*$ strikt monoton, stetig, koerziv und beschränkt.*

Beweis : Dies folgt völlig analog zum Beweis von Lemma 1.29 mit $s = 0$, allerdings muß beim Beweis der Stetigkeit und der Koerzivität anstatt mit den Räumen $L^p(\Omega)$ bzw. $L^{p'}(\Omega)$ mit den Räumen $L^p(I \times \Omega)$ bzw. $L^{p'}(I \times \Omega)$ gearbeitet werden. ∎

Im Beweis von Lemma 2.13 wurde für den Beweis der starken Stetigkeit von A_2 im „stationären Fall“ die kompakte Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega)$, für $r < \frac{np}{n-p}$, benutzt. Im allgemeinen gilt allerdings nicht, dass die Einbettung

$$X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^p(I; L^r(\Omega)),$$

mit $r < \frac{np}{n-p}$ kompakt ist. Dies sieht man sofort, wenn man eine Folge $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ betrachtet, die schwach in $L^p(I)$ gegen ein $f \in L^p(I)$ konvergiert, für die aber nicht gilt $f_n \to f$ stark in $L^p(I)\,(n \to \infty)$. Sei nun $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fest gewählt, dann kann die Folge

$$u_n(t,x) = f_n(t)v(x) \quad \in L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$$

nicht stark in $L^p(I; L^r(\Omega))$ konvergieren. In der Tat gilt:

$$\|u_n - u\|_{L^p(I;L^r(\Omega))}^p = \int_0^T \Big(\int_\Omega |f_n(t) - f(t)|^r \, |v(x)|^r \, dx \Big)^{\frac{p}{r}} dt = \|v\|_{L^r(\Omega)}^p \, \|f_n - f\|_{L^p(I)}^p$$

und somit konvergiert $u_n \to u$ in $L^p(I; L^r(\Omega))\,(n \to \infty)$ genau dann, wenn $f_n \to f$ in $L^p(I)$ $(n \to \infty)$. Wenn wir allerdings A_2 nur auf dem Raum

$$W = \Big\{ u \in L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)) \,\Big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I; W_0^{1,p}(\Omega))^* \Big\}$$

betrachten, erhalten wir eine kompakte Einbettung für W.
Wir betrachten folgende allgemeine Sitauation. Seien B, B_0, B_1 Banachräume, wobei B_0 und B_1 reflexiv sind und folgende Einbettungen gelten:

$$B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1\,, \tag{3.57}$$

$$B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B\,, \tag{3.58}$$

d.h. B_0 bettet kompakt in B ein. Wir bezeichnen

$$W_0 = \Big\{u \in L^{p_0}(I;B_0)\,\Big|\,\frac{du}{dt} \in L^{p_1}(I;B_1)\Big\}\,, \tag{3.59}$$

mit $1 < p_0, p_1 < \infty$, und versehen W_0 mit der Norm

$$\|u\|_{W_0} = \|u\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + \Big\|\frac{du}{dt}\Big\|_{L^{p_1}(I;B_1)}\,.$$

Offensichtlich ist W_0 ein reflexiver Banachraum und es gilt:

$$W_0 \hookrightarrow L^{p_0}(I;B)\,. \tag{3.60}$$

Allerdings haben wir folgendes stärkere Resultat:

3.61 Satz (Aubin 1963, Lions 1969). *Unter den Voraussetzungen (3.57), (3.58) und $1 < p_0, p_1 < \infty$ ist die Einbettung (3.60) kompakt, d.h.*

$$W_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_0}(I;B)\,. \tag{3.62}$$

Bevor wir dies beweisen benötigen wir noch folgenes Resultat:

3.63 Lemma. *Unter den Voraussetzungen (3.57) und (3.58) gibt es für alle $\eta > 0$ eine Konstante $c(\eta)$ so, dass für alle $v \in B_0$ gilt:*

$$\|v\|_B \le \eta\|v\|_{B_0} + c(\eta)\|v\|_{B_1}\,. \tag{3.64}$$

Beweis : Falls (3.64) nicht gilt, gibt es ein $\eta > 0$ und eine Folge $v_n \in B_0$ und $(c_n) \in \mathbb{R}^+, c_n \to \infty\ (n \to \infty)$ so, dass

$$\|v_n\|_B \ge \eta\|v_n\|_{B_0} + c_n\|v_n\|_{B_1}\,.$$

Wir setzen $w_n = v_n/\|v_n\|_{B_0}$ und erhalten

$$\|w_n\|_B \ge \eta + c_n\|w_n\|_{B_1}\,. \tag{3.65}$$

Aufgrund der Einbettung (3.57) gilt

$$\|w_n\|_B \le c\|w_n\|_{B_0} = c\,,$$

und somit folgt aus (3.65) und $c_n \to \infty\ (n \to \infty)$, dass

$$\|w_n\|_{B_1} \to 0 \qquad\qquad (n \to \infty)\,. \tag{3.66}$$

Allerdings gilt $\|w_n\|_{B_0} = 1$ nach Konstruktion. Somit folgt aus der kompakten Einbettung $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$, dass es eine Teilfolge (w_{n_k}) gibt so, dass

$$w_{n_k} \to w \qquad \text{in } B \qquad\qquad (k \to \infty)\,.$$

Aus der Einbettung $B \hookrightarrow B_1$ folgt sofort

$$w_{n_k} \to w \qquad \text{in } B_1 \qquad (k \to \infty)\,,$$

was zusammen mit (3.66) liefert $w = 0$. Insgesamt haben wir also

$$\|w_{n_k}\|_B \to 0 \qquad (k \to \infty)\,,$$

was ein Widerspruch zu (3.65) ist, da $\eta > 0$. ∎

Beweis (Satz 3.61): Sei (v_n) eine beschränkte Folge in W_0. Da W_0 reflexiv ist gibt es eine Teilfolge (v_{n_k}) für die gilt:

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \qquad \text{in } W_0 \qquad (k \to \infty)\,.$$

Durch Übergang zur Folge $u_k = v_{n_k} - v$ gilt also

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup 0 && \text{in } W_0 && (n \to \infty)\,,\\ \|u_n\|_W &\le c && \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Aufgrund von Lemma 3.63 gibt es für alle $\eta > 0$ ein $d(\eta)$ mit

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B)} \le \eta \|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + d(\eta)\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_1)}\,. \tag{3.68}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus $(3.67)_2$ und (3.68) mit $\eta = \frac{\varepsilon}{2c}$ erhalten wir

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B)} \le \frac{\varepsilon}{2} + d(\eta)\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_1)}\,.$$

Um den Satz zu beweisen reicht es also zu zeigen, dass

$$u_n \to 0 \qquad \text{in } L^{p_0}(I;B_1) \qquad (n \to \infty)\,. \tag{3.69}$$

Aus der Definition von W_0 und der Einbettung $W^{1,p_1}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ folgt sofort

$$W_0 \hookrightarrow W^{1,p_1}(I;B_1) \hookrightarrow C(\bar{I};B_1)\,. \tag{3.70}$$

Aus dieser Einbettung und $(3.67)_2$ erhalten wir sofort, dass für alle $t \in I$ gilt:

$$\|u_n(t)\|_{B_1} \le c\,. \tag{3.71}$$

Wir definieren für $1 > \lambda > 0$ fest, aber beliebig,

$$w_n(t) = u_n(\lambda t) \tag{3.72}$$

und erhalten aus $(3.67)_2$

$$\begin{aligned} w_n(0) &= u_n(0)\,,\\ \|w_n\|_{L^{p_0}(I;B_0)} &= \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p_0}}}\|u_n\|_{L^{p_0}(0,\lambda T;B_0)} \le c\lambda^{-\frac{1}{p_0}}\,,\\ \|\frac{d}{dt}w_n\|_{L^{p_1}(I;B_1)} &= \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{1}{p_1}}}\|\frac{d}{dt}u_n\|_{L^{p_1}(0,\lambda T;B_1)} \le c\lambda^{1-\frac{1}{p_1}}\,. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Sei $\varphi \in C^1(I)$ derart, dass $\varphi(T) = 0, \varphi(0) = -1$. Dann gilt:

$$w_n(0) = \int_0^T \frac{d}{dt}\big(w_n(t)\varphi(t)\big)\,dt = \int_0^T \varphi(t)\frac{dw_n(t)}{dt}\,dt = \int_0^T \frac{d\varphi(t)}{dt} w_n(t)\,dt\,,$$

was zusammen mit (3.73)$_3$ liefert

$$\begin{aligned}\|w_n(0)\|_{B_1} &\le c(\varphi)\|\frac{dw_n}{dt}\|_{L^{p_1}(I;B_1)} + \|\int_0^T \frac{d\varphi}{dt} w_n\,dt\|_{B_1}\\ &\le c\lambda^{1-\frac{1}{p_1}} + \|\int_0^T \frac{d\varphi}{dt} w_n\,dt\|_{B_1}\,.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Da $p_1 > 1$ ist, können wir λ derart wählen, dass

$$c\lambda^{1-\frac{1}{p_1}} \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.75}$$

gilt. Weiter haben wir für alle $g \in B_0^*$

$$\begin{aligned}\big\langle g, \int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt}\,dt\big\rangle_{B_0} &= \int_0^T \langle g, w_n\rangle_{B_0} \frac{d\varphi}{dt}\,dt\\ &= \int_0^{\lambda T} \big\langle g\frac{d\varphi}{ds}(\frac{s}{\lambda}), u_n(s)\big\rangle_{B_0} \frac{1}{\lambda}\,ds \to 0 \qquad (n\to\infty)\,,\end{aligned}$$

da $\frac{d\varphi}{ds} g \in L^{p_0'}(0,\lambda T; B_0^*)$ und $u_n \rightharpoonup 0$ in $L^{p_0}(0,\lambda T; B_0)$ $(n \to \infty)$ aufgrund von (3.67) und $\lambda < 1$. Also haben wir gezeigt, dass

$$\int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt}\,dt \rightharpoonup 0 \qquad \text{in } B_0 \qquad (n\to\infty)\,,$$

was aufgrund der kompakten Einbettung $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$ impliziert

$$\int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt} \to 0 \qquad \text{in } B \qquad (n\to\infty)\,.$$

Dies zusammen mit (3.75), (3.74) und (3.67) ergibt

$$u_n(0) = w_n(0) \to 0 \qquad \text{in } B_1 \qquad (n\to\infty)\,.$$

Sei nun $s \in I$ beliebig. Ein völlig analoges Vorgehen mit w_n ersetzt durch

$$\widetilde{w}_n(t) = u_n(s+\lambda t)\,,$$

liefert sofort für alle $s \in I$

$$u_n(s) \to 0 \qquad \text{in } B_1 \qquad (n\to\infty)\,.$$

Dies zusammen mit (3.71) und dem Satz über dominierte Konvergenz liefert (3.69) und der Satz ist bewiesen. ∎