Wir benötigen eine weiteren Einbettungssatz für den Raum W.

3.76 Lemma. *Sei $\frac{2n}{n+2} \le p < n$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \ge 2$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Für das Gelfand-Tripel $\big(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big)$ und für alle Funktionen aus dem Raum W, definiert in (3.19), gilt:*

$$\int_I \int_\Omega |u(t,x)|^q \,dx\,dt \le c \int_I \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^p \,dx\,dt \Big(\sup_{t\in I} \int_\Omega |u(t,x)|^2 \,dx \Big)^{\frac{p}{n}}, \tag{3.77}$$

wobei

$$q = \frac{n+2}{n} p\,. \tag{3.78}$$

Beweis : Aus Lemma 3.20 folgt die Einbettung $W \hookrightarrow C(I;H)$, d.h.

$$\sup_{t\in I} \|u(t)\|_{L^2} \le c\,\|u\|_W\,. \tag{3.79}$$

Mit Hilfe der Hölder–Ungleichung erhalten wir für $r \ge 2$

$$\|u\|_{L^r} = \Big(\int_\Omega |u|^{r\alpha} |u|^{r(1-\alpha)} \,dx \Big)^{\frac{1}{p}} \le \|u\|^\alpha_{L^{r\alpha\delta}} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{r(1-\alpha)\delta'}}\,, \tag{3.80}$$

für $\alpha \in (0,1)$ und $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} = 1$. Die Forderungen

$$r\alpha\delta = \frac{np}{n-p} \qquad r(1-\alpha)\delta' = 2 \tag{3.81}$$

liefern

$$\alpha = \frac{np(r-2)}{r(np+2p-2n)}\,. \tag{3.82}$$

Aus (3.80) folgt nach Integration über das Zeitintervall I

$$\begin{aligned} \int_I \|u(t)\|^r_{L^r(\Omega)} \,dt &\le c \int_I \|u(t)\|^{\alpha r}_{W^{1,p}} \|u(t)\|^{(1-\alpha)r}_{L^2} \,dt \\ &\le c \sup_{t\in I} \|u(t)\|^{(1-\alpha)r}_{L^2} \int_I \|u(t)\|^{\alpha r}_{W^{1,p}} \,dt\,. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Nun müssen wir sicherstellen, dass $\alpha r = p$ gilt, was zusammen mit (3.82) liefert

$$r = p\frac{2+n}{n}$$

und $(1-\alpha)r = p\frac{2}{n}$. Dies eingesetzt in (3.83) liefert (3.77). ■

• Aufgrund von (3.79) kann man (3.77) auch schreiben als

$$\|u\|_{L^q(I\times\Omega)} \le c\,\|u\|_W\,, \qquad q = p\frac{n+2}{n}\,. \tag{3.84}$$

3.85 Folgerung. *Unter den Bedingungen von Lemma 3.76 ist die Einbettung*

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(I \times \Omega)$$

kompakt, falls

$$q < p\frac{n+2}{n}\,. \tag{3.86}$$

Beweis : Wenn man im Beweis von Lemma 3.76 anstatt (3.81) fordert, dass

$$r\alpha\delta = s < \frac{np}{n-p} \qquad r(1-\alpha)\delta' = 2$$

erhält man

$$\alpha = \frac{s(2-r)}{r(s-2)}\,.$$

Wie im Beweis von Lemma 3.76 folgt dann

$$\int_I \|u\|_{L^r}^r\,dt \le c \sup_{t\in I} \|u(t)\|_{L^2}^{r-p} \int_I \|u(t)\|_{L^s}^p\,dt \tag{3.87}$$

für alle $r < p\frac{n+2}{n}$. Aufgrund von Satz 3.61 mit $B_0 = W_0^{1,p}(\Omega), B = L^s(\Omega)$, $s < \frac{np}{n-p}$, $B_1 = (W_0^{1,p}(\Omega))^*, p_0 = p, p_1 = p'$ haben wir

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(I; L^s(\Omega))\,. \tag{3.88}$$

Sei nun $(u_n) \subseteq W$ eine beschränkte, schwach konvergente Folge. Aufgrund von (3.88) gibt es eine Teilfoge (u_{n_k}) mit

$$u_{n_k} \to u \qquad \text{in } L^p(I; L^s(\Omega)) \quad (k \to \infty)\,. \tag{3.89}$$

Aus (3.87), (3.79) und (3.89) folgt also

$$\begin{aligned}\int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^r}^r\,dt &\le c\,\|u_{n_k} - u\|_W^{r-p} \int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^s}^p\,dt \\ &\le c \int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^s}^p\,dt \ \to 0 \quad (k \to \infty)\,,\end{aligned}$$

d.h. $u_{n_k} \to u$ in $L^r(I \times \Omega)$ $(k \to \infty)$, falls $r < p\frac{n+2}{n}$. ∎

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen, um den Operator A_2 zu betrachten.

3.90 Lemma. *Sei $1 < p < \infty, X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$ und genüge die stetige Funktion g der Bedingung (2.14), d.h. g besitzt $(r-1)$–Wachstum. Dann bildet der Operator A_2 den Raum*

$$W = \{u \in X \,|\, \frac{du}{dt} \in X^*\}$$

in seinen Dualraum ab und ist beschränkt, falls $r \le p\frac{n+2}{n}$. Für $r < p\frac{n+2}{n}$ ist A_2 stark stetig.

Beweis : 1. Aufgrund der Wachstumsbedingung (2.14) haben wir für alle $u, v \in W$ und $q = p\frac{n+2}{n}$

$$\begin{aligned} |\langle A_2 u, v\rangle| &\le c \int_I \int_\Omega (1+|u|)^{r-1}|v|\,dx\,dt \\ &\le c\,(1+\|u\|^{r-1}_{L^{(r-1)q'}(I\times\Omega)})\|v\|_{L^q(I\times\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Sofern $(r-1)q' \le q$ gilt, erhalten wir also aufgrund von (3.84)

$$|\langle A_2 u, v\rangle| \le c\,(1+\|u\|_W^{r-1})\,\|v\|_W\,. \tag{3.91}$$

Die Forderung $(r-1)q' \le q$ ist äquivalent zu $r \le q = p\frac{n+2}{n}$. Somit folgt aus (3.91) und der Definition der dualen Norm in W^*, dass $A_2 : W \to W^*$ und dass A_2 beschränkt ist.

2. Sei $(u_n) \subseteq W$ eine schwach konvergente Folge. Aufgrund von Folgerung 3.85 gibt es eine Teilfolge mit

$$u_{n_k} \to u \qquad \text{in } L^r(I\times\Omega) \qquad (k\to\infty)\,,$$

wobei $r < p\frac{n+2}{n}$. Wir setzen (vgl. Lemma 2.13, Teil 2.)

$$F(u) = g(u)$$

und erhalten aus Lemma 1.19, dass der Nemyckii–Operator

$$F : L^r(I\times\Omega) \to L^{r'}(I\times\Omega)$$

stetig ist, d.h.

$$\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}(I\times\Omega)} \to 0 \qquad\qquad (k\to\infty)\,.$$

Daraus und aus der Definition der Norm in W^* erhalten wir sofort, dass (vgl. Lemma 2.13, Teil 2.)

$$A_2 u_{n_k} \to A_2 u \qquad \text{in } W^* \qquad (k\to\infty)\,.$$

Das Konvergenzprinzip Lemma 0.4 liefert, dass$A_2 : W \to W^*$ stark stetig ist. ■

In Lemma 3.55 wurde gezeigt, dass der Operator A_1 den Raum X in seinen Dualraum X^* abbildet. Da $W \subseteq X$ ist, erhalten wir sofort, dass

$$A_1 : W \to W^*$$

und dass $A_1 : W \to W^*$ ein stetiger, strikt monotoner, koerziver und beschränkter Operator ist.

3.92 Lemma. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 3.90 erfülle g die Koerzivitätsbedingung (2.18). Dann ist der Operator $A = A_1 + A_2 \colon W \to W^*$ koerziv.*

Beweis : Der Beweis läuft genau wie der Beweis von Lemma 2.17, wenn man $L^p(\Omega)$ durch $L^p(I\times\Omega)$ ersetzt. ■

3.93 Satz. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet mit Rand* $\partial\Omega \in C^{0,1}$ *und sei* $I = (0,T)$ *ein endliches Zeitintervall. Sei* $\frac{2n}{n+2} \leq p < n$ *und die stetige Funktion* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *erfülle die Bedingung* (2.14) *und* (2.18) *mit* $1 \leq r < p\frac{n+2}{n}$*. Dann gibt es für alle* $f \in L^{p'}(I \times \Omega)$ *eine Lösung* $u \in D(L) = \{u \in W \,\big|\, u(0) = 0\}$ *des Problems* (3.54)*, d.h. für alle* $\varphi \in C_0^\infty(I \times \Omega)$ *gilt*

$$\int\limits_I \big\langle \frac{du(t)}{dt}, \varphi(t) \big\rangle_{W_0^{1,p}} dt + \int\limits_I \int\limits_\Omega |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) \nabla \varphi(t)\, dx\, dt$$
$$+ \int\limits_I \int\limits_\Omega g(u(t))\varphi(t)\, dx\, dt = \int\limits_I \int\limits_\Omega f(t)\varphi(t)\, dx\, dt\,.$$

Beweis : Offensichtlich ist $\big(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big)$ ein Gelfand–Tripel, da $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ für $p \geq \frac{2n}{n+2}$. Der Operator $A \colon W \to W^*$ ist koerziv nach Lemma 3.92 und pseudomonoton, demistetig und beschränkt aufgrund von Lemma 2.5 und Lemma 3.56, sowie Lemma 3.90 (vgl. Beweis von Satz 2.19). Die Behauptung folgt sofort aus Satz 3.53, da $L : D(L) \subseteq W \to W^* : u \mapsto \frac{du}{dt}$ ein maximal monotoner Operator ist. ∎

Kapitel 4

Der Abbildungsgrad

Der Abbildungsgrad ist nützlich, um die Lösbarkeit von Gleichungen der Art

$$f(x) = y$$

mit Hilfe topologischer Überlegungen zu zeigen. Grob gesagt gibt der Abbildungsgrad die Anzahl der Lösungen an. Der Abbildungsgrad kann definiert werden für Funktionen
a) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Mit Hilfe dieses Begriffes des Abbildungsgrades können wir den Satz von Brouwer, Satz 1.2.17 einfach beweisen.
b) $f\colon X \to X$, wobei X ein Banachraum ist. In diesem Fall finden wir einen einfachen Beweis für den Satz von Schauder, Satz 1.2.43.

4.1 Der Abbildungsgrad von Brouwer

Im Folgenden sei immer $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, ein beschränktes, offenes Gebiet.
Ziel dieses Abschnitts ist es, folgenden Satz zu beweisen:

1.1 Satz (Brouwer 1912, Nagumo 1951). *Sei $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, und sei $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Dann existiert eine ganze Zahl $d(f, \Omega, p)$, der* ***Abbildungsgrad****, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Falls $d(f, \Omega, p) \neq 0$, dann existiert ein $x_0 \in \Omega$, so dass*

$$f(x_0) = p\,.$$

(*Existenz von Lösungen*)

(ii) *Falls $f(x,t)\colon \bar{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung ist und $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq f(x,t)$ für alle $x \in \partial\Omega$ und $t \in [0,1]$, dann gilt:*

$$d(f(.,0), \Omega, p) = d(f(.,1), \Omega, p)\,.$$

(*Invarianz unter Homotopien*)

(iii) *Sei* $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$, Ω_i *offen, disjunkt, beschränkt,* $\partial\Omega_i \subseteq \partial\Omega$. *Dann gilt für alle* $p \notin f(\partial\Omega)$:

$$d(f,\Omega,p) = \sum_i d(f,\Omega_i,p)\,.$$

(*Zerlegungseigenschaft*)

Satz 1.1 verallgemeinert folgendes Konzept von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^n$. Sei Γ eine geschlossene C^1–Kurve und $a \in C \setminus \Gamma$. Die **Umlaufzahl** $n(\Gamma,a)$ von Γ bezüglich a ist definiert durch

$$n(\Gamma,a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z-a} \quad .$$

Wir setzen

$$\deg(f,\Gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{f(\Gamma)} \frac{dz}{z}\,.$$

Dabei sei f eine meromorphe Funktion mit $f \neq 0$ auf Γ und Γ eine nullhomologe C^1–Kurve. Dann ist

$$\deg(f,\Gamma,0) = \sum_{z\in N} k(z)n(\Gamma,z),$$

wobei N die Menge der Nullstellen von f ist und $k(z) \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle $z \in N$ (Argument–Prinzip, siehe [4, S. 162]). Für $n = 2$ stimmen beide Konzepte überein.

Die Konstruktion des Abbildungsgrades von Brouwer

Sei $f\colon \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Die Determinante der Jacobi-Matrix von f im Punkte $x \in \Omega$ bezeichnen wir mit $J(f(x))$, d.h.

$$J(f(x)) = \det(\nabla f(x)).$$

Ferner setzen wir für $p \in \mathbb{R}^n$

$$f^{-1}(p) = \{x \in \Omega \,\big|\, f(x) = p\}.$$

Der Punkt $x \in f^{-1}(p)$ heißt **regulär**, wenn $J(f(x)) \neq 0$.

1.2 Lemma. *Sei* $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $p \in f(\overline{\Omega}) \setminus f(\partial\Omega)$, *und sei jeder Punkt der Menge* $f^{-1}(p)$ *regulär. Dann ist* $f^{-1}(p)$ *endlich.*

Beweis : Sei $f^{-1}(p)$ nicht endlich. Dann gibt es eine Folge (x_n) mit $x_n \in f^{-1}(p)$. Da Ω beschränkt ist, ist auch die Folge (x_n) beschränkt. Daher gibt es ein $x_0 \in \overline{\Omega}$ mit $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ für eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n). Für diese Teilfolge gilt

$$f(x_{n_k}) = p$$

und somit $f(x_0) = p$, da f stetig ist. Nach Voraussetzung haben wir also $x_0 \notin \partial\Omega$ und $x_0 \in f^{-1}(p)$. Da $f^{-1}(p)$ nur aus regulären besteht, erhalten wir $J(f(x_0)) \neq 0$, d.h.

der Rang von $\nabla f(x_0)$ ist n. Demzufolge ist $\nabla f(x_0)$ ein Homöomorphismus. Nach dem Satz über die inverse Funktion (Satz 2.2.14) folgt, dass $f\mid_{U(x_0)}$ ebenfalls ein Homöomorphismus und insbesondere eineindeutig ist. Dies ist ein Widerspruch, denn einerseits ist $f(x_0) = p$ und andererseits existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $x_n \in U(x_0)$ und

$$f(x_n) = p\,.$$

∎

1.3 Definition. *Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und sei $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ derart, dass alle Punkte in $f^{-1}(p)$ regulär sind. Dann definieren wir den* ***Abbildungsgrad*** *durch*

$$d(f, \Omega, p) := \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J(f(x))\,.$$

- Aus Lemma 1.2 folgt, dass die Summe in der Definition endlich ist.
- Offensichtlich ist $d(f, \Omega, p) \in \mathbb{Z}$.
- Falls $f^{-1}(p) = \emptyset$, definieren wir $d(f, \Omega, p) \equiv 0$.

Wir wollen nun die Definition auf solche Fälle verallgemeinern, bei denen

a) $f^{-1}(p)$ nichtreguläre Punkte enthält,

b) $f \in C(\overline{\Omega})$.

In beiden Fällen benutzen wir dazu Approximationsargumente. Wir werden dabei wie folgt vorgehen:

a) Sei

$$B = \{x \in \Omega \,\big|\, J(f(x)) = 0\}$$

und sei $p \in f(B) \setminus f(\partial\Omega)$. Der Satz von Sard wird liefern, dass $m(f(B)) = 0$, wobei m das Lebesgue–Maß bezeichnet. Daher hat $f(B)$ keine inneren Punkte und es gibt eine Folge $p_n \to p$ $(n \to \infty)$ mit

$$p_n \notin f(B), \qquad p_n \notin f(\partial\Omega)\,. \tag{1.4}$$

Wir werden zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n)$$

existiert und zwar unabhängig von der Wahl der Folge (p_n). Daher können wir für $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ definieren

$$d(f, \Omega, p) \equiv \lim_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n).$$

b) Zu $f \in C(\overline{\Omega})$ gibt es nach dem Approximationssatz von Weierstraß eine Folge von Polynomen (f_n), so dass $f_n \rightrightarrows f$ auf $\overline{\Omega}$ $(n \to \infty)$ mit

$$f_n \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \qquad p \notin f_n(\partial\Omega). \tag{1.5}$$

Wir werden beweisen, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p)$$

existert und unabhängig von der Wahl der Folge (f_n) ist. Danach können wir für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ definieren

$$d(f, \Omega, p) \equiv \lim_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p)\,.$$

Technische Hilfsmittel

Es folgen nun einige technische Lemmata, die uns die gewünschten Ergebnisse liefern.

1.6 Satz (Sard). *Sei $f \in C^1(\Omega)$ und sei G eine offene Teilmenge mit $\overline{G} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$m\big(f(G \cap \{x \in \Omega \,\big|\, J(f(x)) = 0\})\big) = 0.$$

Beweis : Da Ω beschränkt ist gibt es ein $K > 0$ so, dass $\Omega \subseteq R := [-K, K]^n$. Wir überdecken den Würfel R mit Würfeln r_i mit Seitenlänge $l < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\overline{G}, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Dann gibt es endlich viele Würfel $r_i \subseteq \Omega, i = 1, \dots, N$, mit

$$\overline{G} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} r_i\,.$$

Wir zeigen, dass das Bild der Menge aller krititschen Punkte, d.h. aller Punkte mit $J(f(x)) = 0$, in $\bigcup_{i=1}^{N} r_i$ eine Lebesgue–Nullmenge ist.

1. Sei dazu r_i einer der Würfel mit Seitenlänge l. Aufgrund der Voraussetzung ist $\nabla f \in C(\Omega)$ auf $\overline{G}$ gleichmäßig stetig und beschränkt, d.h. es existiert ein $L > 0$ mit

$$\|\nabla f(x)\| \le L \qquad \forall x \in \overline{G}\,, \tag{1.7}$$

und es existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|\nabla f(p_1) - \nabla f(p_2)\| \le \varepsilon \qquad \forall p_1, p_2 \text{ mit } \|p_1 - p_2\| < \frac{l}{m}\sqrt{n} =: \delta\,. \tag{1.8}$$

Demzufolge gilt nach dem Mittelwertsatz für alle p_1, p_2 mit $\|p_1 - p_2\| < \delta$

$$\begin{aligned}\|f(p_1) - f(p_2) - \nabla f(p_2)(p_1 - p_2)\| &\le \int_0^1 \|\nabla f(p_2 + t(p_1 - p_2)) - \nabla f(p_2)\|\, \|p_1 - p_2\|\, dt \\ &\le \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\delta.\end{aligned}$$

2. Nun zerlegen wir r_i in m^n Würfel r_{ij} der Seitenlänge $\frac{l}{m} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ und wählen einen festen aber beliebigen Würfel r_{ij}. Nach 1. gilt für alle $p_1, p_2 \in r_{ij}$

$$f(p_1) = f(p_2) + \nabla f(p_2)(p_1 - p_2) + R(p_2, p_1) \tag{1.9}$$

mit

$$\|R(p_2, p_1)\| \leq \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\delta\,. \tag{1.10}$$

Sei nun $p_2 \in r_{ij}$ ein kritischer Punkt und sei $r_{ij} - p_2 := \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x = y - p_2, y \in r_{ij}\}$. Wir definieren eine Abbildung $T\colon r_{ij} - p_2 \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} T(p) &= f(p_2 + p) - f(p_2)\,, \qquad p \in r_{ij} - p_2\,, \\ &= \nabla f(p_2)p + \tilde{R}(p), \end{aligned}$$

mit $\tilde{R}(p) = R(p_2, p + p_2)$. Aus (1.9) und (1.10) (ersetze p_1 durch $p + p_2$) erhalten wir

$$\|\tilde{R}(p)\| \leq \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\delta\,. \tag{1.11}$$

Da p_2 ein kritischer Punkt ist, gilt $\det(\nabla f(p_2)) = 0$, d.h. der Rang von $\nabla f(p_2)$ ist höchstens $n-1$. Also ist das Bild der Menge $r_{ij} - p_2$ unter $\nabla f(p_2)$ in einem $(n-1)$–dimensionalem Raum enthalten. Deshalb gibt es ein $b_1 \in \mathbb{R}^n$, $\|b_1\| = 1$ so, dass

$$(b_1, y) = 0 \qquad \forall y \in (\nabla f(p_2))(r_{ij} - p_2),$$

wobei $(.,.)$ für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ steht. Wir ergänzen b_1 durch $b_2, \ldots, b_n$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann können wir schreiben

$$T(p) = \sum_{i=1}^n (T(p), b_i)b_i.$$

Es gilt für alle $p \in r_{ij} - p_2$

$$\begin{aligned} |(T(p), b_1)| &\leq |(\nabla f(p_2)p, b_1)| + |(\tilde{R}(p), b_1)| \\ &\leq 0 + \varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\delta \\ |(T(p), b_i)| &\leq |(\nabla f(p_2)p, b_i)| + |(\tilde{R}(p), b_i)| \qquad i = 2, \ldots, n \\ &\leq L\|p\|\,\|b_i\| + \|\tilde{R}(p)\|\,\|b_i\| \\ &\leq L\frac{l}{m}\sqrt{n} + \varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{n} \\ &\leq L\delta + \varepsilon\delta\,, \end{aligned}$$

da $\|p\| \leq \frac{l}{m}\sqrt{n}$.

3. Nach Definiton von $T(\cdot)$ gilt:

$$T(r_{ij} - p_2) = f(r_{ij}) + f(p_2).$$

Da das Lebesgue–Maß invariant gegenüber Verschiebungen ist, erhalten wir also

$$m(f(r_{ij})) = m(T(r_{ij} - p_2)) \leq \Big(L\frac{l}{m}\sqrt{n} + \varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{n}\Big)^{n-1}\varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{n}.$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} m(f(r_i)) &\leq \sum_{j=1}^{m^n} m(f(r_{ij})) \\ &\leq m^n\frac{1}{m^n}(Ll\sqrt{n} + \varepsilon l\sqrt{n})^{n-1}\varepsilon l\sqrt{n} \\ &\leq c(n, g, \Omega, f)\,\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt $m(f(r_i)) = 0$, falls r_i einen kritischen Punkt enthält. Somit haben wir für $B = \{x \in \Omega \,\big|\, J(f(x)) = 0\}$, dass

$$m(f(G \cap B)) = 0\,,$$

da die Würfel r_i die Menge G überdecken. ■

• Aus dem Satz von Sard erhalten wir sofort

$$m(f(\Omega \cap B)) = 0\,.$$

Dazu wählen wir

$$G_n = \{x \in \Omega \,\big|\, \operatorname{dist}(\partial\Omega, x) \geq \frac{1}{n}\}\,.$$

Dann gilt $\overline{G}_n \subseteq \Omega$ und $\Omega \subseteq \bigcup\limits_n G_n$. Aus den Eigenschaften des Lebesgue–Maßes folgt also

$$m(f(\Omega \cap B)) \leq \sum_n m(f(G_n \cap B)) = 0.$$

• Sei nun $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Die Menge $f^{-1}(p)$ enthalte nur reguläre Punkte. Dann ist diese Menge nach Lemma1.2 endlich, d.h.

$$f^{-1}(p) = \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Nach dem Beweis von Lemma 1.2 gibt es zu jedem x_i, $i = 1, \ldots, k$, eine Umgebung $U(x_i)$, so dass

$$\begin{aligned} &1)\ U(x_i) \subseteq \Omega \\ &2)\ U(x_i) \cap U(x_j) = \emptyset, \qquad i \neq j\,, \\ &3)\ J(f(y)) \neq 0 \qquad \forall y \in \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i), \\ &4)\ f\,|_{U(x_i)}\ \text{ ist ein Homöomorphismus, d.h. insbesondere eineindeutig.} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Wir setzen

$$\psi(y) := f(y) - p\,. \tag{1.13}$$

Dann ist $\psi(U(x_i))$ eine Umgebung von 0. Demzufolge existiert ein $\eta > 0$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{k} \psi(U(x_i)) \supseteq B_\eta(0).$$

Nach (1.12) gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)$ gilt:

$$\|\psi(y)\| \geq \delta \tag{1.14}$$

denn für $y \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)$ ist $\|\psi(y)\| > 0$. Außerdem ist $y \mapsto \|\psi(y)\|$ stetig und nimmt daher auf dem Kompaktum $\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)$ ein Minimum an, d.h. es existiert ein δ so, dass $\|\psi(y)\| \geq \delta > 0$.

1.15 Lemma. *Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und enthalte $f^{-1}(p)$ nur reguläre Punkte. Ferner sei $\varphi \in C([0,\infty)) \cap C^\infty(0,\infty)$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|)\, dx = 1 \tag{1.16}$$

und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [0, \min(\delta,\eta))$. *Dann gilt:*

$$\int_{\Omega} \varphi(\|f(x) - p\|) J(f(x))\, dx = d(f,\Omega,p)\,. \tag{1.17}$$

Beweis : Offensichtlich ist

$$J(f(x)) = J(\psi(x)),$$

denn $\psi = f - p$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varphi(\|f(x) - p\|) J(f(x))\, dx &= \int_{\Omega} \varphi(\|\psi(x)\|) J(\psi(x))\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{U(x_i)} \varphi(\|\psi(x)\|) J(\psi(x))\, dx, \\
&= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J(\psi(x_i)) \int_{U(x_i)} \varphi(\|\psi(x)\|) |J(\psi(x))|\, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J(\psi(x_i)) \int\limits_{\psi(U(x_i))} \varphi(\|x\|)\, dx, \\
&= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J(\psi(x_i)), \\
&= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J(f(x_i)) \\
&= \sum_{f^{-1}(p)} J(f(x)) = d(f, \Omega, p)\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir (1.14) und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [0, \min(\eta, \delta))$, den Transformationssatz sowie $\psi(U(x_i)) \supseteq B_\eta(0) \supset \operatorname{supp}\varphi$ und (1.16) benutzt haben. ∎

• Die rechte Seite von Formel (1.17) ist unabhängig von der Wahl von φ mit den in Lemma 1.15 geforderten Eigenschaften. Daher ist auch die linke Seite von Formel (1.17) unabhängig von der Wahl von φ.

1.18 Lemma. *Sei $p \in \mathbb{R}^n$ und seien die Funktionen $f_i \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n\,, i = 1, 2$ Elemente des Raumes $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Sei $\varepsilon > 0$ klein genug, so dass*

$$
\begin{aligned}
\|f_i(x) - p\| &\geq 7\varepsilon \qquad \text{für } i = 1, 2 \text{ und } x \in \partial\Omega, \\
\|f_1(x) - f_2(x)\| &< \varepsilon \qquad \text{für } x \in \overline{\Omega}.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Ferner seien alle Punkte aus $f_i^{-1}(p)$, $i = 1, 2$, regulär. Dann gilt

$$
d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p)\,. \tag{1.20}
$$

Beweis : O.B.d.A. sei $p = 0$. Sei $\gamma : [0, \infty) \to [0, 1]$ aus $C^1([0, \infty))$ so, dass

$$
\begin{aligned}
\gamma(r) &= 1, \qquad \text{falls } 0 \leq r \leq 2\varepsilon, \\
\gamma(r) &= 0, \qquad \text{falls } 3\varepsilon \leq r\,.
\end{aligned}
$$

Wir definieren

$$
f_3(x) = \big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) f_1(x) + \gamma(\|f_1(x)\|) f_2(x).
$$

Dann ist $f_3 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Darüber hinaus gilt für $x \in \overline{\Omega},\ i = 1, 2$

$$
\begin{aligned}
\|f_i(x) - f_3(x)\| &= \big\|\big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) f_i(x) + \gamma(\|f_1(x)\|) f_i(x) - \\
&\qquad \big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) f_1(x) - \gamma(\|f_1(x)\|) f_2(x)\big\| \\
&\leq \big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) \|f_i(x) - f_1(x)\| + \gamma(\|f_1(x)\|) \|f_i(x) - f_2(x)\| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Außerdem haben wir

$$
\|f_3(x)\| > 6\varepsilon \qquad \text{für } x \in \partial\Omega,
$$

da $7\varepsilon \le \|f_1(x)\| \le \|f_1(x) - f_3(x)\| + \|f_3(x)\| \le \varepsilon + \|f_3(x)\|$, und

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f_1(x) \qquad \text{falls } \|f_1(x)\| > 3\varepsilon\,, \\ f_3(x) &= f_2(x) \qquad \text{falls } \|f_1(x)\| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Wir wählen φ_1, φ_2 mit denselben Eigenschaften wie φ aus Lemma 1.15 sowie mit

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= 0 \qquad \text{für } r \in [0, 4\varepsilon] \cup [5\varepsilon, \infty)\,, \\ \varphi_2(r) &= 0 \qquad \text{für } r \in [\varepsilon, \infty)\,. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\varphi_1(\|f_3(x)\|)J(f_3(x)) = \varphi_1(\|f_1(x)\|)J(f_1(x)),$$

denn $\varphi_1(r)$ ist ungleich Null für $r > 4\varepsilon$. Aber für $\|f_3\| > 4\varepsilon$ gilt:

$$\|f_1\| \ge \|f_3\| - \|f_1 - f_3\| > 4\varepsilon - \varepsilon = 3\varepsilon\,,$$

und deshalb $f_1 = f_3$. Weiterhin folgt

$$\varphi_2(\|f_3(x)\|)J(f_3(x)) = \varphi_2(\|f_2(x)\|)J(f_2(x)),$$

denn $\varphi_2(r)$ ist nur ungleich 0, falls $r < \varepsilon$. Sei also $\|f_3\| < \varepsilon$, dann gilt

$$\|f_2\| \le \|f_2 - f_3\| + \|f_3\| \le \varepsilon + \varepsilon \le 2\varepsilon\,,$$

und somit $f_3 = f_2$. Nach obiger Bemerkung und Lemma 1.15 folgt daher

$$\begin{aligned} d(f_1, \Omega, p) &= \int_\Omega \varphi_1(\|f_1(x)\|)J(f_1(x))\,dx \\ &= \int_\Omega \varphi_1(\|f_3(x)\|)J(f_3(x))\,dx \\ &= \int_\Omega \varphi_2(\|f_3(\|x\|)\|)J(f_3(x))\,dx \\ &= \int_\Omega \varphi_2(\|f_2(x)\|)J(f_2(x))\,dx \quad = \quad d(f_2, \Omega, p). \end{aligned}$$

∎

1.21 Lemma. *Seien $f_i \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), z_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2$ und sei $\varepsilon > 0$ klein genug. Weiterhin nehmen wir an, dass*

$$\begin{aligned} \|f_i(x) - z_j\| &\ge 7\varepsilon \qquad \text{für } i, j = 1, 2,\ x \in \partial\Omega, \\ \|f_1(x) - f_2(x)\| &< \varepsilon \qquad \text{für } x \in \overline{\Omega}\,, \\ \|z_1 - z_2\| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ferner seien alle Punkte von $f_i^{-1}(z_j)$, $i, j = 1, 2$, regulär. Dann gilt

$$d(f_1, \Omega, z_1) = d(f_2, \Omega, z_2)\,.$$