Beweis : Nach Lemma 1.18 gilt $d(f_1, \Omega, z_1) = d(f_2, \Omega, z_1)$.
Wir setzen

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f_2(x), \\ g_2(x) &= f_2(x) + (z_1 - z_2). \end{aligned}$$

Die Funktionen g_1 und g_2 erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 1.18, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \|g_1(x) - z_1\| &= \|f_2(x) - z_1\| \geq 7\varepsilon, \\ \|g_2(x) - z_1\| &= \|f_2(x) + z_1 - z_2 - z_1\| \geq \varepsilon \\ \|g_2(x) - g_1(x)\| &= \|f_2(x) + z_1 - z_2 - f_2(x)\| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Lemma 1.18 liefert also

$$d(f_2, \Omega, z_1) = d(f_2 + (z_1 - z_2), \Omega, z_1)\,.$$

Ferner gilt

$$d(f_2 + (z_1 - z_2), \Omega, z_1) = d(f_2, \Omega, z_2)\,,$$

da

$$\begin{aligned} g_2^{-1}(z_1) &= \{x \in \Omega \,|\, f_2(x) + z_1 - z_2 = z_1\} = \{x \in \Omega \,|\, f_2(x) = z_2\} \\ &= f_2^{-1}(z_2)\,. \end{aligned}$$

Außerdem haben wir $\nabla f_2 = \nabla g_2$ und somit auch

$$\sum_{x \in f_2^{-1}(z_1)} \operatorname{sgn} J(f_2(x)) = \sum_{x \in g_2^{-1}(z_1)} \operatorname{sgn} J(g_2(x))\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} d(f_1, \Omega, z_1) &= d(f_2, \Omega, z_1) = d(f_2 + (z_1 - z_2), \Omega, z_1) \\ &= d(f_2, \Omega, z_2)\,. \end{aligned}$$

■

Erweiterung auf nichtreguläre Punkte und stetige Funktionen

Nun können wir die Idee zur Konstruktion von $d(f, \Omega, p)$ für nichtreguläres $p \in \mathbb{R}^n$ rigoros ausführen:
Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{(}\Omega))$ und sei $p \in f(B) \setminus f(\partial\Omega)$, wobei

$$B = \{x \in \Omega \,|\, J(f(x)) = 0\}$$

die Menge aller irregulären Punkte ist. Der Rand $\partial\Omega$ ist abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt. Also erhalten wir, da $p \notin f(\partial\Omega)$, dass gilt:

$$\|f(x) - p\| > 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

und somit gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\|f(x) - p\| \geq 8\varepsilon$$

Wir haben im Satz von Sard bewiesen, dass $m(f(B)) = 0$ ist, also hat $f(B)$ hat keine inneren Punkte. Daher gibt es eine Folge (p_n) mit

$$\begin{aligned} &p_n \to p \qquad (n \to \infty), \\ &p_n \notin f(\partial\Omega), \\ &p_n \notin f(B). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Außerdem gibt es ein n_0 so, dass für alle $n,\, k \geq n_0$ gilt $\|p_k - p_n\| < \varepsilon$. Der Grenzübergang $k \to \infty$ liefert, daß dann auch für alle $n \leq n_0$ gilt: $\|p - p_n\| \leq \varepsilon$. Dies hat zur Folge, dass für alle $n \geq n_0$

$$\|f(x) - p_n\| \geq \|f(x) - p\| - \|p - p_n\| \geq 7\varepsilon\,.$$

Lemma 1.21 impliziert daher, dass für alle $n,\, k \geq n_0$ gilt:

$$d(f, \Omega, p_k) = d(f, \Omega, p_n)\,.$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n)$ existiert also, und wir setzen

$$d(f, \Omega, p) := \lim_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n)$$

Es bleibt zu zeigen, dass der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Folge (p_n) ist. Sei dazu (q_n) eine Folge mit $q_n \to p\,(n \to \infty)$, die (1.22) erfüllt. Dann gibt es ein n_1 so, dass für alle $n \geq n_1$ gilt: $\|p_n - q_n\| \leq \varepsilon$ und somit liefert Lemma 1.21

$$d(f, \Omega, q_n) = d(f, \Omega, p_n)\,.$$

Damit ist nun $d(f, \Omega, p)$ für $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ eindeutig definiert.

Im letzten Schritt wollen wir den Abbildungsgrad auf Funktionen $f \in C(\overline{\Omega})$ verallgemeinern.

1.23 Lemma. *Seien $f_i \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $i = 1,\, 2$, und $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ und sei $\varepsilon > 0$ klein genug. Wir nehmen an, dass gilt:*

$$\begin{aligned} \|f_i(x) - p\| &\geq 8\varepsilon \qquad \forall x \in \partial\Omega,\ i = 1,\, 2\,, \\ \|f_1(x) - f_2(x)\| &\leq \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Dann gilt auch

$$d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p).$$

Beweis : 1. Falls p regulär ist, folgt die Behauptung aus Lemma 1.18.

2. Falls p irregulär ist, wählen wir eine Folge (p_n), die (1.22) erfüllt. Dann gibt es ein n_0 so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\|f_i(x) - p_n\| \geq \|f_i(x) - p\| - \|p - p_n\| \geq 7\varepsilon \qquad i = 1,\, 2.$$

Aus Lemma 1.18 folgt daher die Gleichheit $d(f_1, \Omega, p_n) = d(f_2, \Omega, p_n)$. Im Grenzübergang für $n \to \infty$ ergibt sich die Behauptung

$$d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p).$$

■

Sei jetzt $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gibt es eine Folge von Funktionen mit

$$\begin{aligned} & f_n \rightrightarrows f \qquad \text{in } \overline{\Omega}\, (n \to \infty)\,, \\ & f_n \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\,, \\ & p \notin f_n(\partial\Omega)\,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Da $p \notin f(\partial\Omega)$ und $\partial\Omega$ abgeschlossen und beschränkt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in \partial\Omega$

$$\|f(x) - p\| \geq 9\varepsilon\,.$$

Ferner existiert ein n_0, so dass für alle n, $k \geq n_0$ und $x \in \overline{\Omega}$,

$$\|f_n(x) - f_k(x)\| < \varepsilon\,,$$

da $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ auf $\overline{\Omega}$. Deshalb gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|f_n(x) - p\| \geq \|f(x) - p\| - \|f(x) - f_n(x)\| \geq 8\varepsilon \qquad \forall x \in \partial\Omega,\ \forall n \geq n_0.$$

Nach Lemma 1.23 gilt also für alle n, $k \geq n_0$

$$d(f_k, \Omega, p) = d(f_n, \Omega, p)$$

und daher existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p)$, und er ist unabhängig von der Wahl der Folge (f_n), denn wenn (g_n) eine weitere Folge ist, die (1.24) erfüllt, dann gilt für ein geeignetes n_1

$$\|g_n(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_1,\ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Wir setzen

$$d(f, \Omega, p) := \lim_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p).$$

Somit ist nun für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ der Abbildungsgrad definiert.

Eigenschaften des Abbildungsgrades von Brouwer

1.25 Satz. *Seien Ω_1, Ω_2 disjunkte, beschränkte und offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \to \mathbb{R}^n$ stetig und $p \in \mathbb{R}^n$, $p \notin f(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$. Dann gilt:*

$$d(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) = d(f, \Omega_1, p) + d(f, \Omega_2, p).$$

Beweis : 1. Sei $f \in C^1(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ und p regulär. Dann gilt

$$\sum_{\substack{x \in f^{-1}(p) \\ x \in \Omega_1 \cup \Omega_2}} J(f(x)) = \sum_{\substack{f^{-1}(p) \\ x \in \Omega_1}} J(f(x)) + \sum_{\substack{f^{-1}(p) \\ x \in \Omega_2}} J(f(x))$$

wegen der Disjunktheit der Mengen Ω_1 und Ω_2.

2. Sei $f \in C^1(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ und p irregulär. Wir wählen eine Folge (p_n), die (1.22) erfüllt. Nach 1. gilt die Behauptung für jedes p_n. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daher die Behauptung für p.

3. Sei $f \in C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$. Wir wählen eine Folge (f_n), die (1.24) erfüllt. 2. liefert die Behauptung für jedes f_n. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann das Gewünschte. ■

1.26 Satz. *Sei $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$. Falls $d(f, \Omega, p) \neq 0$ ist, dann existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $f(x_0) = p$.*

Beweis : Sei dem nicht so und gelte also für alle $x \in \overline{\Omega}$: $f(x) \neq p$. Damit haben wir $\|f(x) - p\| > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ und, da f und die Norm stetig sind, existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\|f(x) - p\| \geq 2\varepsilon\,.$$

Sei (f_n) eine Folge, die (1.24) erfüllt mit $f_n \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann gibt es ein n_0 so, dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega}$.

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon\,.$$

Somit gilt

$$\|f_n(x) - p\| \geq \|f(x) - p\| - \|f(x) - f_n(x)\| \geq \varepsilon$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$ und alle $n \geq n_0$. Sei nun φ eine Funktion aus Lemma 1.15 mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [0, \min(\varepsilon, \delta, \eta))$. Dann erhalten wir für alle $n \geq n_0$

$$d(f_n, \Omega, p) = \int_\Omega \varphi(\|f_n(x) - p\|) J(f_n(x))\, dx = 0\,.$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt $d(f, \Omega, p) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt die Behauptung. ■

1.27 Satz. *Sei $f(x,t) \colon \overline{\Omega} \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und $f(x,t) \neq p$ für alle $x \in \partial\Omega$, und alle $t \in [a,b]$. Dann ist $d(f(.,t), \Omega, p)$ konstant auf $[a,b]$.*

Beweis : Aus der Voraussetzung folgt, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert so, dass für alle $x \in \partial\Omega$, und alle $t \in [a,b]$ gilt:

$$\|f(x,t) - p\| \geq 9\varepsilon\,.$$

Außerdem ist $f(x,t)$ gleichmäßig stetig auf $\overline{\Omega} \times [a,b]$, d.h.

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall t_1,\, t_2 \text{ mit } |t_1 - t_2| < \delta \quad |f(x,t_1) - f(x,t_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Wir fixieren zwei solcher t_1, t_2 und wählen zwei Folgen (f_{1n}) und (f_{2n}), die (1.24) erfüllen mit

$$\begin{aligned} f_{1n} &\rightrightarrows f(x,t_1) \qquad \text{auf } \overline{\Omega}\,(n\to\infty)\,, \\ f_{2n} &\rightrightarrows f(x,t_2) \qquad \text{auf } \overline{\Omega}\,(n\to\infty)\,. \end{aligned}$$

Dann existiert ein n_0, so dass für alle $n \ge n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega}$, $i = 1, 2$, gilt:

$$\|f(x,t_i) - f_{in}\| \le \varepsilon$$

und wir erhalten

$$\|f_{in} - p\| \ge \|p - f(x,t_i)\| - \|f_{in} - f(x,t_i)\| \ge 8\varepsilon\,.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 1.18 erfüllt, welches

$$d(f_{1n},\Omega,p) = d(f_{2n},\Omega,p)$$

liefert. Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt für alle t_1, t_2 mit $|t_1 - t_2| < \delta$

$$d(f(.,t_1),\Omega,p) = d(f(.,t_2),\Omega,p)\,.$$

Eine endliche Überdeckung von $[a,b]$ mit Intervallen der Länge kleiner δ liefert sofort, dass $d(f(.,t),\Omega,p)$ konstant auf $[a,b]$ ist. ■

- Falls $f = \mathrm{id}$, dann ist

$$d(\mathrm{id},\Omega,p) = \begin{cases} 0 & p \notin \overline{\Omega}, \\ 1 & p \in \Omega. \end{cases}$$

Der folgende Satz liefert nichttriviale Beispiele für Funktionen deren Abbildungsgrad nicht identisch Null ist.

1.28 Satz (Borsuk). *Sei Ω ein symmetrisches (d.h. $x \in \Omega \Rightarrow -x \in \Omega$), offenes beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Sei $0 \in \Omega$ und $f \in C(\overline{\Omega})$ eine ungerade Funktion auf $\partial\Omega$ (d.h. $f(x) = -f(-x)\,\forall x \in \partial\Omega$). Dann ist $d(f,\Omega,0)$ eine ungerade Zahl.*

Beweis : siehe [7, S. 24]. ■

Beispiel: $\Omega = (-1,1)$, $f(x) = x^3$.

Im folgenden Satz verschärfen wir die Ausage von Lemma 1.18.

1.29 Satz. *Seien $f_i\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, stetig und gelte für alle $x \in \partial\Omega$*

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| < \|f_1(x) - p\|\,.$$

Dann gilt

$$d(f_1,\Omega,p) = d(f_2,\Omega,p).$$

Beweis : Nach Voraussetzung gilt für alle $x \in \partial\Omega$:

$$\|f_1(x) - p\| > 0$$

und

$$\|f_2(x) - p\| \geq -\|f_1(x) - f_2(x)\| + \|f_1(x) - p\| > 0\,.$$

Wir setzen $f(x,t) = f_1(x) + t(f_2(x) - f_1(x))$, $0 \leq t \leq 1$. Die Funktion $f(x,t)$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.27, und ist somit konstant für alle $t \in [0,1]$, d.h.

$$d(f(x,t), \Omega, p) = d(f_1(x) + t(f_2(x) - f_1(x)), \Omega, p) = C\,.$$

Wenn wir $t = 0$ und $t = 1$ einsetzen, erhalten wir

$$d(f_1(x), \Omega, p) = C = d(f_2(x), \Omega, p).$$

■

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir, wie angekündigt, den Satz von Brouwer auf eine andere Weise als im Kapitel 1 beweisen.

1.30 Satz (Brouwer). *Sei $f\colon \overline{B}_1(0) \to \overline{B}_1(0)$ stetig. Dann existiert ein Fixpunkt in $\overline{B}_1(0)$, d.h. es existiert ein $x_0 \in \overline{B}_1(0)$ so, dass:*

$$f(x_0) = x_0.$$

Beweis : Nehmen wir an, dass für alle $x \in \overline{B}_1(0)$ gilt: $f(x) \neq x$. Wir definieren $F(x,t) = x - tf(x)$ für $x \in \overline{B}_1(0)$, $0 \leq t \leq 1$. Unsere Annahme impliziert, dass

$$\begin{aligned} \|F(x,t)\| = \|x - tf(x)\| \geq \|x\| - t\|f(x)\| &\geq 1 - t \qquad \text{für } x \in \partial B_1(0),\ t \in [0,1]\,, \\ &> 0 \qquad\quad\ \text{für } x \in \partial B_1(0),\ t \in [0,1), \end{aligned}$$

d.h. $0 \notin F(\partial B_1(0), t)$, $0 \leq t < 1$. Für $t = 1$ folgt $\|F(x,1)\| > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$ nach unserer Annahme. Demnach sind die Vorausetzungen von Satz 1.27 für $p = 0$ erfüllt und damit erhalten wir

$$d(F(.,0), B_1(0), 0) = d(F(.,1), B_1(0), 0).$$

Nun ist aber $F(.,0) = \mathrm{id}$ und damit $d(F(.,0), B_1(0), 0) = 1$. Nach Satz 1.26 existiert daher ein $x_0 \in B_1(0)$ mit

$$x_0 - f(x_0) = 0\,.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also besitzt f einen Fixpunkt. ■

Beispiel: Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + \sin(x+y) &= 0 \\ x - 2y + \cos(x+y) &= 0 \end{aligned} \tag{1.31}$$

besitzt eine Lösung in $B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^2$, falls $1 < 5r^2$. Um dies zu zeigen, setzen wir $f, g\colon [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= 2x + y + t\sin(x+y)\,, \\ g(t,x,y) &= x - 2y + t\sin(x+y)\,. \end{aligned}$$

Für $t = 0$ besitzt das homogene, lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

die eindeutige Lösung $(x, y) = (0, 0)$, da die zugehörige Matrix Rang 2 hat. Somit erhalten wir nach Definition 1.3, dass für alle $r > 0$ und $F(t, x, y) = \big(f(t, x, y), g(t, x, y)\big)$ gilt:

$$d(F(0, \cdot, \cdot), B_r(0), 0) = -1\,. \tag{1.32}$$

Sei nun $(x, y) \in \partial B_r(0)$ und sei $f(t, x, y) = g(t, x, y) = 0$. Dann erhalten wir

$$t^2(\sin^2(x + y) + \cos^2(x + y)) = (-2x - y)^2 + (2y - x)^2$$

und also

$$t^2 = 5r^2\,.$$

Für $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $t \in [0, 1]$ ist dies nicht möglich, d.h. $F(t, x, y) \neq 0$ für alle $t \in [0, 1], (x, y) \in \partial B_r(0), r > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Satz 1.27 und (1.32) liefern also

$$d(F(1, \cdot, \cdot), B_r(0), 0) = -1\,.$$

Aufgrund von Satz 1.26 besitzt also (1.31) eine Lösung.

4.2 Der Abbildungsgrad von Leray-Schauder

In diesem Kapitel wollen wir den Begriff des Abbildungsgrades auf unendlich-dimensionale Räume ausweiten. Bei diesem Schritt können jedoch Probleme auftreten. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, dass die Einheitskugel in unendlich-dimensionalen Räumen nicht kompakt ist - im Gegensatz zu endlich-dimensionalen Räumen. In Kapitel 1.2 haben wir aus dem Gegenbeispiel von Kakutani bereits gelernt, dass im Allgemeinen eine stetige Funktion auf einem Banachraum keinen Fixpunkt haben muss. Dieses Gegenbeispiel zeigt auch, dass es unmöglich ist, einen Abbildungsgrad für nur stetige Funktionen auf Banachräumen zu definieren, der dieselben Eigenschaften hat wie in endlich-dimensionalen Räumen. Diese Eigenschaften implizieren nämlich die Existenz eines Fixpunktes von stetigen Abbildungen, die die Einheitskugel auf sich selber abbilden.

Die Grundidee bei der Konstruktion des Abbildungsgrades von Leray-Schauder ist, die betrachteten Operatoren durch Operatoren mit endlich-dimensionalem Wertebereich zu approximieren. Dazu erinnern wir uns an Satz 1.2.3. Dieser besagt:

$$\begin{aligned} &T\colon M \subseteq X \to X \text{ kompakt, } M \text{ beschränkt und abgeschlossen.} \\ &\Rightarrow \exists\, P_n\colon M \to X \text{ kompakt mit } \dim R(P_n) < \infty \text{ und} \\ &\qquad\qquad \|Tx - P_n x\| \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in M. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Daher ist es sinnvoll, für kompakte Operatoren einen Abbildungsgrad zu definieren. Im Weiteren werden wir mit den im Beweis von Satz 1.2.3 konstruierten „Schauder“–Operatoren arbeiten.

Abbildungsgrad für endlich–dimensionale Vektorräume

Bisher haben wir einen Abbildungsgrad auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Jetzt wollen wir dies auf beliebige endlich–dimensionale normierte Vektorräme verallgemeinern. Sei nun X ein normierter Vektorraum mit $\dim X < \infty$. Dann gibt es ein n und einen isometrischen Isomorphismus $h\colon X \to \mathbb{R}^n$, d.h. $\|h(x)\|_{\mathbb{R}^n} = \|x\|_X$.
Sei $f\colon \Omega \subseteq X \to X$ eine stetige Abbidlung, Ω offen und beschränkt, $p \notin f(\partial\Omega)$. Wir definieren den **Abbildungsgrad** der Abbildung f bezüglich Ω und p durch

$$d_X(f, \Omega, p) \equiv d_{\mathbb{R}^n}(h \circ f \circ h^{-1}, h(\Omega), h(p)). \tag{2.2}$$

2.3 Lemma. *Die Definition (2.2) ist unabhängig von der Wahl von h.*

Beweis : Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, p regulär. O.B.d.A. sei $p = 0$. Dann gilt auf Grund der Eigenschaften der Isometrie h, insbesondere $J(h) = 1$ und $\|h \circ f(x)\| = \|f(x)\|$, und der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(\|f(x)\|) J(f(x))\, dx &= \int_\Omega \varphi(\|h \circ f(x)\|) J(h \circ f(x))\, dx \\ &= \int_{h(\Omega)} \varphi(\|h \circ f \circ h^{-1}(x)\|) J(h \circ f \circ h^{-1}(x))\, dx,\end{aligned}$$

wobei φ die Funktion aus Lemma 1.15 sei. Damit folgt die Behauptung aus der Theorie, die wir in Abschnitt 4.1 entwickelt haben. ∎

2.4 Satz (Reduktion). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $m < n$ und $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$, d.h. der Raum $\mathbb{R}^m$ ist identifiziert mit dem Teilraum des $\mathbb{R}^n$, für dessen Elemente x gilt*

$$x_{m+1} = \ldots = x_n = 0.$$

Sei $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ stetig und $g\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$g(x) = x + f(x), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}^m$ mit $p \notin g(\partial\Omega)$

$$d_n(g, \Omega, p) = d_m(g|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, p).$$

Beweis : Es ist leicht zu sehen, dass $g(\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^m$ und somit ist die rechte Seite in obiger Formel wohldefiniert. Wir nehmen an, dass $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, und p regulär ist. Sei nun x aus Ω so, dass $g(x) = x + f(x) = p \in \mathbb{R}^m$. Diese Forderung ist äquivalent zu $x = p - f(x) \in \mathbb{R}^m$, d.h. $x \in \mathbb{R}^m$, und x ist also im Urbild von p bzgl. $g|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}$. Somit gilt $g^{-1}(p) = (g|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m})^{-1}(p)$. Zu zeigen ist nun, dass $J(g(x)) = J(g|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}(x))$. Dazu müssen wir die jeweiligen Gradienten berechnen. Es gilt:

$$\nabla g|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}(x) = I_m + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,m},$$

$$\nabla g(x) = \left(\begin{array}{c|c} I_m + \nabla f & \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=m+1,\ldots,n}} \\ \hline 0 & I_{n-m} \end{array}\right).$$

Entwicklung nach der „rechten unteren Ecke“ liefert $J(g(x)) = J(g|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}(x))$. Aus der Theorie des Abschnittes 4.1 folgt daher die Behauptung (vgl. z.B. Defintion 1.3). ∎

Konstruktion des Abbildungsgrades von Leray-Schauder

Wir wollen nun einen Abbildungsgrad für *kompakte Pertubationen* der Identität definieren. Sei X ein Banachraum und $\Omega \subseteq X$ eine beschränkte, offene Menge, die die Null enthält, d.h. $0 \in \Omega$. Ferner sei

$$T : \Omega \subseteq X \to X$$

ein kompakter Operator und sei

$$0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$$

wobei $I : X \to X$ die Identität ist.

Der Einfachheit halber definieren wir den Abbildungsgrad nur für den Punkt 0. Es ist jedoch kein Problem, den Begriff des Abbildungsgrades auf beliebige Punkte $p \in X$ und $0 \notin \Omega$ zu erweitern.
Zuerst zeigen wir, dass eine positive Zahl $r > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\|x - Tx\| \geq r\,. \tag{2.5}$$

Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \in \partial\Omega$, so dass

$$\|x_n - Tx_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Da T kompakt ist, gibt es ein $x_0 \in X$ und eine Teilfolge, wiederum mit (x_n) bezeichnet, so dass $Tx_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Damit folgt

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - x_0\|.$$

Beide Summanden auf der rechten Seite konvergieren gegen 0 für $n \to \infty$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0,$$

auf Grund der Stetigkeit von T. Wir haben gezeigt, dass $x_0 - Tx_0 = 0$ mit $x_0 \in \partial\Omega$, da $\partial\Omega$ eine abgeschlossene Menge ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$.

Nun betrachten wir Abbildungen $P_n : \overline{\Omega} \to X$, die (2.1) erfüllen. Nach (2.1) gibt es eine positive Zahl n_0, so, dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\|P_n x - Tx\| \leq \frac{r}{2}\,. \tag{2.6}$$

Ferner erhalten wir, dass $X_n \cap \Omega =: \Omega_n$ offen und beschränkt ist, wobei $X_n := R(P_n)$ ein linearer, endlich-dimensionaler Unterraum von X ist; sowie $\partial\Omega_n \subseteq \partial\Omega$. Da $(I - P_n)(\Omega_n) \subseteq X_n$ und

$$\inf_{x\in\partial\Omega} \|x - P_n x\| \geq \inf_{x\in\partial\Omega} \Big(\|x - Tx\| - \|Tx - P_n x\|\Big) \overset{(2.5)}{\geq} r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0,$$

können wir $d_{X_n}(I-P_n,\Omega_n,0)$ wie in (2.2) definieren. Den **Leray-Schauder Abbildungsgrad** von $I-T$ bezüglich Ω und 0 definieren wir nun als

$$d_X(I-T,\Omega,0) := \lim_{n\to\infty} d_{X_n}(I-P_n,\Omega_n,0). \tag{2.7}$$

Um diese Definition zu rechtfertigen, müssen wir zeigen, dass der Grenzwert existiert und unabhängig von der Wahl der P_n ist.
Seien dazu P_{n_1} und P_{n_2} zwei Abbildungen so, dass für alle $x\in\overline{\Omega}$, $i=1,2$ gilt:

$$\|P_{n_i}x-Tx\| \le \frac{r}{2}\,.$$

Außerdem seien X_{n_i} die zugehörigen linearen, endlich-dimensionalen Unterräume von X, $\dim X_{n_i}<\infty$. X_m sei der kleinste lineare Raum, der X_{n_1} und X_{n_2} enthält. Aus Satz 2.4 folgt

$$d(I-P_{n_i},\Omega_{n_i},0)=d(I-P_{n_i},\Omega_m,0), \quad i=1,2, \tag{2.8}$$

wobei $\Omega_{n_i}=X_{n_i}\cap\Omega$ und $\Omega_m=X_m\cap\Omega$. Wir betrachten die Homotopie $H\colon\Omega_m\times[0,1]\to X_m$, definiert durch

$$H(x,t)=t(I-P_{n_1})(x)+(1-t)(I-P_{n_2})(x).$$

Für alle $x\in\partial\Omega$ gilt:

$$\begin{aligned}\|H(x,t)-(I-T)(x)\| &= \|H(x,t)-(t+(1-t))(I-T)(x)\|\\ &\le t\|(I-P_{n_1})(x)-(I-T)(x)\|\\ &\quad+(1-t)\|(I-P_{n_2})(x)-(I-T)(x)\|\\ &\le t\frac{r}{2}+(1-t)\frac{r}{2}=\frac{r}{2}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Somit erhalten wir für alle $t\in[0,1]$, $x\in\partial\Omega$

$$\begin{aligned}\|H(x,t)\| &\ge \|(I-T)(x)\|-\|H(x,t)-(I-T)(x)\|\\ &\overset{(2.9)}{\ge} r-\frac{r}{2}>0.\end{aligned}$$

Daher folgt nach Satz 1.27 (Homotopieeigenschaft des Abbildungsgrades), dass $d(H(.,t),\Omega_m,0)$ für alle $t\in[0,1]$ konstant ist, d.h. für alle $t_1,t_2\in[0,1]$ gilt

$$d(t_1(I-P_{n_1})+(1-t_1)(I-P_{n_1}),\Omega_m,0)=d(t_2(I-P_{n_2})+(1-t_2)(I-P_{n_2}),\Omega_m,0).$$

Für $t_1=0$ und $t_2=1$ erhalten wir insbesondere

$$d(I-P_{n_1},\Omega_m,0)=d(I-P_{n_2},\Omega_m,0).$$

Dies und (2.8) ergeben also

$$d(I-P_{n_1},\Omega_{n_1},0)=d(I-P_{n_2},\Omega_{n_2},0), \tag{2.10}$$

somit ist die Folge in (2.7) für $n\ge n_0$ konstant, der Grenzwert existiert und ist unabhängig von der Wahl der P_n.

Eigenschaften des Abbildungsgrades von Leray-Schauder

Jetzt zeigen wir, dass der Abbildungsgrad von Leray-Schauder diesselben Eigenschaften hat wie der Abbildungsgrad von Brouwer.

2.11 Satz. *Falls $d(I-T,\Omega,0) \neq 0$, dann gibt es ein $x_0 \in \Omega$, so dass $Tx_0 = x_0$.*

Beweis : Wir wählen P_n, die (2.1) erfüllen. Für diese gilt nach Konstruktion des Abbildungsgrades (vgl. (2.10)) für alle $n \geq n_0$

$$d(I-P_n,\Omega_n,0) \neq 0.$$

Daher folgt aus Satz 1.26, dass es ein $x_n \in \Omega_n$ gibt mit $P_n x_n = x_n$. Für die Folge (x_n) gilt

$$\begin{aligned}\|x_n - Tx_n\| &\leq \|x_n - P_n x_n\| + \|P_n x_n - Tx_n\| \\ &\leq 0 + \frac{1}{n}\,.\end{aligned}$$

Da T kompakt ist und die Folge $(x_n) \subset \Omega_n \subseteq \Omega$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge, wieder mit (x_n) bezeichnet, und einen Punkt $y \in \overline{\Omega}$ so, dass $Tx_n \to y$ $(n \to \infty)$. Aus obiger Abschätzung folgt weiter, dass $x_n \to y$ $(n \to \infty)$. Da T stetig ist, gilt außerdem $Tx_n \to Ty$ $(n \to \infty)$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes impliziert dies $Ty = y$. Da $0 \notin (I-T)(\partial\Omega)$ ist, gilt also $y \in \overline{\Omega} \setminus \partial\Omega = \Omega$. ■

2.12 Definition. *Für $t \in [0,1]$ seien die Operatoren $T(t)\colon M \subseteq X \to X$ kompakt. Dann ist $T\colon t \mapsto T(t)$ genau dann eine* ***Homotopie****, wenn für alle $\varepsilon > 0$ und alle beschränkten Teilmengen $G \subseteq M$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle t_1, t_2 mit $|t_1 - t_2| < \delta$, und alle $x \in G$ gilt:*

$$\|T(t_1)(x) - T(t_2)(x)\| \leq \varepsilon.$$

2.13 Satz. *Sei T eine Homotopie auf $\overline{\Omega}$, wobei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von X sei. Sei ferner $T(t)(x) \neq x$ für alle $t \in [0,1]$ und alle $x \in \partial\Omega$. Dann hat für alle $t \in [0,1]$ der Abbildungsgrad $d(I-T(t),\Omega,0)$ denselben Wert.*

Beweis : 1. Zuerst zeigen wir, dass eine Zahl $r > 0$ existiert, so dass für alle $t \in [0,1]$ und alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\|(I-T(t))(x)\| \geq r.$$

Angenommen dies sei nicht so, dann existieren für alle n Elemente $x_n \in \partial\Omega$, $t_n \in [0,1]$, so, dass

$$x_n - T(t_n)(x_n) = y_n, \tag{2.14}$$

mit $\|y_n\| \leq \frac{1}{n}$. Aufgrund von $(x_n) \subset \partial\Omega$, ist die Folge (x_n) beschränkt. Weiterhin folgt aus $(t_n) \subset [0,1]$, die Existenz einer Teilfolge, wiederum mit (t_n) bezeichnet, und eines Punktes $t_0 \in [0,1]$ mit $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$. Da der Operator $T(t_0)$ kompakt ist, folgt auch für eine Teilfolge, wiederum mit (x_n) bezeichnet $T(t_0)(x_n) \to y \in X$ $(n \to \infty)$. Dies impliziert zusammen mit Definition 2.12

$$\begin{aligned}\|T(t_n)(x_n) - y\| &\leq \|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(x_n)\| + \|T(t_0)(x_n) - y\| \\ &\to 0 \qquad (n \to \infty)\,.\end{aligned}$$

Also gilt $T(t_n)(x_n) \to y$ $(n \to \infty)$. Wegen (2.14) folgt daraus auch, da $y_n \to 0$ $(n \to \infty)$, $x_n \to y \in \partial\Omega$ $(n \to \infty)$. Die Stetigkeit von $T(t_0)$ impliziert dann $T(t_0)(x_n) \to T(t_0)(y)$ $(n \to \infty)$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(y)\| &\le \|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(x_n)\| + \|T(t_0)(x_n) - T(t_0)(y)\| \\ &\to 0 \qquad (n \to \infty)\,,\end{aligned}$$

d.h. $T(t_n)(x_n) \to T(t_0)(y)$ $(n \to \infty)$. Wenn wir daher in (2.14) zum Grenzwert übergehen, erhalten wir

$$y - T(t_0)(y) = 0,$$

wobei $y \in \partial\Omega$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes.

2. Wir wählen nun ein $t_1 \in [0,1]$ fest und Abbildungen P_n, die (2.1) erfüllen, d.h. für $n \ge n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega}$ gilt:

$$\|P_n(x) - T(t_1)(x)\| \le \frac{r}{4}\,.$$

Da T eine Homotopie ist, gilt für alle t mit $|t - t_1| < \delta$ und alle $x \in \overline{\Omega}$

$$\|T(t_1)(x) - T(t)(x)\| \le \frac{r}{4}.$$

Daher haben wir für alle t mit $|t - t_1| < \delta$

$$\|P_n(x) - T(t)(x)\| \le \|P_n(x) - T(t_1)(x)\| + \|T(t_1)(x) - T(t)(x)\| \le \frac{r}{2}.$$

Die Definition des Abbildungsgrades von Leray-Schauder impliziert für alle t mit $|t - t_1| < \delta$ und n groß genug

$$d(I - P_n, \Omega_n, 0) = d(I - T(t), \Omega, 0),$$

wobei $\Omega_n = \Omega \cap X_n$ und $X_n = R(P_n)$, d.h. der Abbildungsgrad ist konstant auf dem Intervall $(t_1-\delta, t_1+\delta)$. Nun ist $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{t_1\in[0,1]} (t_1-\delta, t_1+\delta)$. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es $t_1, \dots, t_m$ mit $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{t_j=1}^{m} (t_j - \delta, t_j + \delta)$. Also hat für alle $t \in [0,1]$ der Abbildungsgrad $d(I - T(t), \Omega, 0)$ denselben Wert. ■

2.15 Satz (Schauder). *Sei $\Omega \subseteq X$ eine offene, konvexe Teilmenge mit $0 \in \Omega$ und sei $T\colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ kompakt. Dann hat T einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x_0 \in \Omega$ mit $T(x_0) = x_0$.*

Beweis : Analog zum Beweis von Satz 1.30 mit $H(x,t) = x - t\,T(x)$. ■

2.16 Satz (Borsuk). *Sei $\Omega \subseteq X$ eine beschränkte, offene und symmetrische Teilmenge mit $0 \in \Omega$ und sei $T\colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ ungerade und kompakt. Ferner sei $T(x) \neq x$ für alle $x \in \partial\Omega$. Dann ist $d(I - T, \Omega, 0)$ ungerade.*

Beweis : Sei $v_1, \ldots, v_p$ ein ε–Netz von $\overline{T(\overline{\Omega})}$. Setze $v_{p+1} = -v_1, \ldots, v_{2p} = -v_p$, sowie $v_{2p+1} = v_1, \ldots, v_{3p} = v_p$. Definiere

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{2p} m_i(T(x))v_i}{\sum_{i=1}^{2p} m_i(T(x))},$$

wobei

$$m_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - v_i\| & \text{für } \|x - v_i\| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{für } \|x - v_i\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Es gilt: $\dim R(P_n) < \infty$, $\Omega \cap R(P_n)$ ist symmetrisch und $P_n \rightrightarrows T$ (vgl. Beweis von Satz 1.2.3). Außerdem sind die P_n ungerade, denn

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{2p} m_i(T(x))v_i}{\sum_{i=1}^{2p} m_i(T(x))} = \frac{-\sum_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(-x))v_{i+p}}{\sum_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(-x))}, \tag{2.17}$$

denn $v_i = -v_{i+p}$, $i = 1, \ldots, 2p$, $T(x) = -T(-x)$, und somit

$$\begin{aligned} m_i(T(x)) &= \varepsilon - \|T(x) - v_i\| = \varepsilon - \| - T(-x) - v_i\| \\ &= \varepsilon - \|T(-x) - v_{i+p}\| = m_{i+p}(T(-x)). \end{aligned}$$

Da $v_i = v_{i+2p}$, $i = 1, \ldots, p$ ist, gilt auch $m_i = m_{i+2p}$, $i = 1, \ldots, p$, und somit erhält man mit Hilfe einer Indexverschiebung, dass man $P_n(x)$ auch schreiben kann als

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(x))v_{i+p}}{\sum_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(x))},$$

also erhalten wir aus (2.17), dass

$$P_n(x) = -P_n(-x)\,.$$

Mit Satz 1.29 folgt, dass $d(I - P_n, \Omega_n, 0)$ ungerade ist. Demnach ist nach Definition des Abbildungsgrades $d(I - T, \Omega, 0)$ ungerade. ∎