Beweis : Sei $v_1, \dots, v_p$ ein ε–Netz von $\overline{T(\overline{\Omega})}$. Setze $v_{p+1} = -v_1, \dots, v_{2p} = -v_p$, sowie $v_{2p+1} = v_1, \dots, v_{3p} = v_p$. Definiere

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(T(x))v_i}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(T(x))},$$

wobei

$$m_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - v_i\| & \text{für } \|x - v_i\| \le \varepsilon, \\ 0 & \text{für } \|x - v_i\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Es gilt: $\dim R(P_n) < \infty$, $\Omega \cap R(P_n)$ ist symmetrisch und $P_n \rightrightarrows T$ (vgl. Beweis von Satz 1.2.3). Außerdem sind die P_n ungerade, denn

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(T(x))v_i}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(T(x))} = \frac{-\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(-x))v_{i+p}}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(-x))}, \tag{2.17}$$

denn $v_i = -v_{i+p}$, $i = 1, \dots, 2p$, $T(x) = -T(-x)$, und somit

$$\begin{aligned} m_i(T(x)) &= \varepsilon - \|T(x) - v_i\| = \varepsilon - \| - T(-x) - v_i\| \\ &= \varepsilon - \|T(-x) - v_{i+p}\| = m_{i+p}(T(-x)). \end{aligned}$$

Da $v_i = v_{i+2p}$, $i = 1, \dots, p$ ist, gilt auch $m_i = m_{i+2p}$, $i = 1, \dots, p$, und somit erhält man mit Hilfe einer Indexverschiebung, dass man $P_n(x)$ auch schreiben kann als

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(x))v_{i+p}}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(x))},$$

also erhalten wir aus (2.17), dass

$$P_n(x) = -P_n(-x).$$

Mit Satz 1.29 folgt, dass $d(I - P_n, \Omega_n, 0)$ ungerade ist. Demnach ist nach Definition des Abbildungsgrades $d(I - T, \Omega, 0)$ ungerade. ∎

Quasilineare elliptische Gleichungen III

Zuerst betrachten wir die lineare Gleichung

$$Au = f, \tag{2.18}$$

wobei $A : X \to Y$ ein linearer Operator ist und $f \in Y$ ein gegebenes Element. Sei $B : X \to Y$ ein weiterer linearer Operator und sei

$$D_t u := tAu + (1 - t)Bu, \qquad 0 \le t \le 1. \tag{2.19}$$

Anstelle von (2.18) betrachten wir die Schar von Problemen

$$D_t = f\,, \qquad 0 \le t \le 1\,, \tag{2.20}$$

und machen folgende Annahme: Falls u eine Lösung von (2.20) für ein beliebiges $f \in Y$ ist, dann gibt es eine Konstante c, die unabhängig von f und $t \in [0,1]$ ist so, dass die apriori Abschätzung

$$\|u\|_X \le c_0 \|f\|_Y \tag{2.21}$$

gilt.

2.22 Satz. *Seien X, Y Banachräume und seien $A, B : X \to Y$ stetige, lineare Operatoren. Ferner gelte für (2.20) die apriori Abschätzung (2.21) und das Problem (2.20) habe für $t = 0$ und alle $f \in Y$ eine eindeutige Lösung. Dann hat auch das Problem (2.18) für alle $f \in Y$ eine eindeutige Lösung.*

Beweis : 1. Sei $N \subseteq [0,1]$ die Menge der t, für welche das Problem (2.20) für gegebenes t und alle $f \in Y$ eine eindeutige Lösung hat. Offensichtlich ist $0 \in N$ und wir wollen zeigen, dass auch $1 \in N$ ist. Sei $\tau > 0$ derart, dass

$$\tau c_0 \left(\|A\| + \|B\|\right) < 1\,. \tag{2.23}$$

Wir werden zeigen, dass dann die Implikation

$$s \in N \qquad \Rightarrow \qquad [s, s+\tau] \subseteq N \tag{2.24}$$

gilt. Da τ unabhängig von s ist, können wir in endlich vielen Schritten von 0 zu 1 kommen, d.h. $1 \in N$.

2. Es bleibt zu zeigen, dass $[s, s+\tau] \subseteq N$ ist, falls $s \in N$ und τ wie in (2.22) gewählt wurde. Das Problem (2.20) für $t = s + \tau\delta\,, \delta \in [0,1]$ ist äquivalent zu

$$D_s u = f - \delta\tau A u + \delta\tau B u\,. \tag{2.25}$$

Da $s \in N$ existiert der inverse Operator $D_s^{-1} : Y \to X$ und (2.21) impliziert

$$\|D_s^{-1}\| \le c_0\,.$$

Also ist (2.25) äquivalent zu

$$u = D_s^{-1}(f - \delta\tau A u + \delta\tau B u) =: Lu\,. \tag{2.26}$$

Für $L : X \to X$ gilt:

$$\|Lu - Lv\| \le \delta\tau c_0 \left(\|A\| + \|B\|\right)\|u - v\|\,,$$

und somit liefert der Banachsche Fixpunktsatz, dass (2.26) für alle $\delta \in [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt, d.h. $[s, s+\tau] \subseteq N$. ∎

Wir wollen Satz 2.22 anwenden um zu zeigen, dass das lineare elliptische Problem

$$\begin{aligned} \big(Lu\big)(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) &= f(x) \qquad && \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.27}$$

eine Lösung besitzt.

2.28 Satz (Schauder, 1934). *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit Rand $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}, \alpha \in (0,1)$. Seien ferner $f, a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), i,j = 1,\dots,n$ und gelte*

$$\|a_{i,j}\|_{C^{0,\alpha}} \le c_1\,, \qquad i,j = 1,\dots,n\,. \tag{2.29}$$

Der Operator L sei elliptisch, d.h. es existiert ein $\lambda_0 > 0$ so, dass für alle $x \in \overline{\Omega}$ und $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \ge \lambda_0 \|\boldsymbol{\zeta}\|^2\,. \tag{2.30}$$

Dann besitzt das Problem (2.27) eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ die der Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le c_2(c_1,\lambda_0)\,\|f\|_{C^{0,\alpha}} \tag{2.31}$$

genügt.

Der Beweis beruht auf folgenden zwei Beobachtungen:

(i) Für den Laplace Operator gilt die Behauptung des Satzes, d.h. für alle $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ existiert eine eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.32}$$

die der Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le c_3(c_1,\lambda_0)\,\|f\|_{C^{0,\alpha}} \tag{2.33}$$

genügt. Der Beweis dieser Aussage kann in Gilbarg, Trudinger oder Bers, John, Schechter gefunden werden.

(ii) Für das Problem (2.27) gelten *Schauder–Abschätzungen*, d.h. falls $a_{ij}, i,j = 1,\dots,n$ die Bedingungen von Satz 2.28 erfüllen und u eine Lösung von (2.27) ist, dann gilt:

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le c_2(c_1,\lambda_0)\,\|f\|_{C^{0,\alpha}} \tag{2.34}$$

für beliebige c_1, λ_0. Man beachte, dass die Schauder–Abschätzungen (2.34) keine Aussage über die Existenz von Lösungen enthält. Auch dies kann in Gilbarg, Trudinger: „Elliptic partial differential equations of second order“ nachgelesen werden.

Beweis (Satz 2.28): Um Satz 2.22 anwenden zu können setzen wir $X = C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $Y = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), Bu = -\Delta u$, und $Au = Lu$. Wir müssen also die apriori Abschätzung (2.21) für den Operator D_t definiert in (2.20) herleiten. Aus den Eigenschaften Hölder–stetiger Funktionen erhalten wir

$$\|D_t u\|_{C^{0,\alpha}} \le c\,\|u\|_{C^{2,\alpha}}\,,$$

d.h. $D_t : X \to Y$ ist stetig und linear für alle $t \in [0,1]$. Die Gleichung

$$D_0 u = f$$

hat nach den Voraussetzungen von Satz 2.28 eine eindeutige Lösung. Da die apriori Abschätzungen (2.33) und (2.34) nur von λ_0 und c_1 abhängen erhalten wir für die Lösungen u von

$$D_t u = f$$

sofort

$$\|u\|_X \le c\,\|f\|_Y\,,$$

wobei c von $t \in [0,1]$ unabhängig ist. Satz 2.22 liefert also, dass

$$D_1 u = f$$

genau eine Lösung in X besitzt. ∎

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen um folgende quasilineare elliptische Gleichung

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \varepsilon\, g(x,u,\nabla u) && \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.35}$$

wobei ε klein genug ist, und $g : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $C^{0,\alpha}$–Funktion ist, zu betrachten.

2.36 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit Rand $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}, \alpha \in (0,1)$ und sei $g : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $C^{0,\alpha}$–Funktion. Ferner erfülle der Operator L definiert in (2.27) die Bedingungen (2.29), (2.30). Dann gibt es für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $|\varepsilon|$ klein genug eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ des Problems (2.35).*

Beweis : 1. Wir setzen $X = C^{1,\beta}(\overline{\Omega}), \beta \in (0,1)$. Aufgrund der Eigenschaften Hölder–stetiger Funktionen erhalten wir für alle Funktionen mit

$$\|u\|_{C^{1,\beta}} \le c_4\,, \tag{2.37}$$

dass für $\gamma = \alpha\beta$ gilt:

$$\|g(x,u,\nabla u)\|_{C^{0,\gamma}} \le c_5\,, \tag{2.38}$$

wobei die Konstante c_5 nur von c_4 und g abhängt.

2. Aufgrund von Satz 2.28 ist der Operator $L : C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \to C^{\gamma}(\overline{\Omega})$ invertierbar. Wir setzen

$$T(t)u = t\,L^{-1}\big(\varepsilon g(x,u,\nabla u)\big)\,, \tag{2.39}$$

mit $T(t) : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \subseteq C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, d.h. der Operator $T(t)$ ordnet jedem $u \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ die Lösung $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ des Problems

$$\begin{aligned} Lv &= t\,\varepsilon\, g(x,u,\nabla u) && \text{in } \Omega\,,\\ v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.40}$$

zu. Aufgrund von Satz 2.28 und der kompakten Einbettung $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ sind die Operatoren $T(t), t \in [0,1]$ kompakt. Für $t_1, t_2 \in [0,1]$ gilt aufgrund von (2.39), (2.40) und (2.31)

$$\begin{aligned} \|T(t_1)u - T(t_2)u\|_{C^{2,\gamma}} &\le c_2\,\|(t_1-t_2)\,\varepsilon\, g(x,u,\nabla u)\|_{C^{0,\gamma}}\\ &\le c_2|\varepsilon|\,|t_1-t_2|\,\|g(x,u,\nabla u)\|_{C^{0,\gamma}}\,. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Aufgrund von (2.38) gilt also

$$\|T(t_1)u - T(t_2)u\|_{C^{2,\gamma}} \leq c_2 c_5 \varepsilon \, |t_1 - t_2|,$$

für beliebige Funktionen u mit $\|u\|_{C^{1,\beta}} \leq c_4$. Somit haben wir gezeigt, dass $T : t \mapsto T(t) : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ eine Homotopie ist.

3. Sei $B_r(0)$ die Kugel mit Radius r in $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Für alle $t \in [0,1]$ und $u \in \partial B_{c_4}(0)$ gilt

$$T(t)u \neq u \tag{2.42}$$

falls $|\varepsilon|$ klein genug ist. In der Tat, sei $u \in \partial B_{c_4}(0)$ ein Element mit $T(t)u = u$, dann gilt aufgrund von (2.40), (2.31) und (2.38)

$$\|u\|_{C^{1,\beta}} \leq c_6 \|u\|_{C^{2,\gamma}} \leq c_6 c_2 t |\varepsilon| \|g(x, u, \nabla u)\|_{C^{0,\gamma}} \leq c_6 c_2 c_5 |\varepsilon| \,,$$

wobei c_6 die Einbettungskonstante von $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ ist. Wir wählen nun $|\varepsilon|$ so klein, dass gilt

$$c_6 c_2 c_5 |\varepsilon| < c_4 \,.$$

Wir erhalten einen Widerspruch und somit ist (2.42) bewiesen.

4. Satz 2.13 besagt nun, dass für alle $t \in [0,1]$ der Abbildungsgrad

$$d(I - T(t), B_{c_4}(0), 0)$$

konstant ist. Aufgrund von (2.40) und der eindeutigen Lösbarkeit aus Satz 2.28 ist aber $T(0)$ die triviale Abbildung, d.h. $T(0)u = 0$. Da

$$d(I - T(0), B_{c_4}(0), 0) = 1$$

gilt, haben wir auch

$$d(I - T(1), B_{c_4}(0), 0) = 1 \,,$$

d.h. es existiert eine Lösung $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ von (2.35).

5. In Schritt 2 haben wir gezeigt, dass

$$T(1) : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \,,$$

was aufgrund der Einbettung $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,1}(\overline{\Omega})$ impliziert (vgl. (2.37), (2.38))

$$g(x, u, \nabla u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \,.$$

Dies zusammen mit (2.34) liefert

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \,.$$

■