(iii) ***stark stetig*** *genau dann, wenn*

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ in } X \quad (n \to \infty) \qquad \Rightarrow \qquad Au_n \to Au \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)\,.$$

(iv) ***beschränkt*** *genau dann, wenn A beschränkte Mengen in X in beschränkte Mengen in X^* abbildet.*

Zuerst untersuchen wir Eigenschaften von stark stetigen, demistetigen und monotonen Operatoren.

1.4 Lemma. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und $A : X \to X^*$ ein Operator. Dann gilt:*

(i) *Falls A stark stetig ist, so ist A auch kompakt.*

(ii) *Falls A demistetig ist, so ist A auch lokal beschränkt.*

(iii) *Falls A monoton ist, so ist A auch lokal beschränkt.*

(iv) *Falls A monoton und hemistetig ist, so ist A auch demistetig.*

Beweis. 1. Wir wollen zeigen, dass die Menge $A(M)$, wobei $M \subseteq X$ eine beschränkte Teilmenge ist, relativ folgenkompakt ist. Sei also (Au_n) eine beliebige Folge aus $A(M)$. Da M beschränkt ist, ist somit auch (u_n) beschränkt. Aufgrund der Reflexivität des Raumes X existiert eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}), d.h. $u_{n_k} \rightharpoonup u \in X$ $(k \to \infty)$. Daraus folgt $Au_{n_k} \to Au$ $(k \to \infty)$, da A stark stetig ist. Also ist $A(M)$ relativ folgenkompakt, was in Banachräumen äquivalent zur relativen Kompaktheit der Menge $A(M)$ ist.

2. Beweis durch Widerspruch: Sei A nicht lokal beschränkt, d.h. es gibt ein $u \in X$ und eine Folge (u_n) in X mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, so dass $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Da A demistetig ist, folgt $Au_n \rightharpoonup Au$ in X^* $(n \to \infty)$. Demzufolge ist (Au_n) beschränkt nach Lemma 0.3 (i). Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Also ist A lokal beschränkt.

3. Beweis durch Widerspruch: Sei A nicht lokal beschränkt, dann gibt es ein $u \in X$ und eine Folge (u_n) in X mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, so dass $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$ $(n \to \infty)$. O.B.d.A. sei $u = 0$. Wir setzen

$$a_n := (1 + \|Au_n\|\,\|u_n\|)^{-1}\,.$$

Die Monotonie von A liefert, dass für alle $v \in X$ gilt:

$$\langle Au_n - A(\pm v), u_n - (\pm v)\rangle \geq 0\,.$$

Mit obiger Bezeichnung ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\pm a_n \langle Au_n, v\rangle &\leq a_n\big(\langle Au_n, u_n\rangle - \langle A(\pm v), u_n \mp v\rangle\big)\\
&\leq a_n\big(\|Au_n\|\|u_n\| + \|A(\pm v)\|\|u_n \mp v\|\big)\\
&\leq a_n\big(\|Au_n\|\|u_n\| + \|A(\pm v)\|\|u_n\| + \|A(\pm v)\|\|v\|\big)\\
&\leq 1 + c(v)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Definition von a_n benutzt haben und dass nach Voraussetzung $\|u_n\| \le 1$, $n \ge n_0$. Somit gilt für alle $v \in X$

$$\sup_n |\langle a_n A u_n, v\rangle| \le \tilde{c}(v) < \infty\,.$$

Die linearen stetigen Abbildungen $a_n A u_n \colon X \to \mathbb{R}$ sind nach obiger Rechnung punktweise beschränkt. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit liefert also

$$\sup_n \|a_n A u_n\|_{X^*} \le c\,.$$

Wenn wir nun $b_n = \|Au_n\|_{X^*}$ setzen, erhalten wir aufgrund der Definition von a_n

$$b_n \le \frac{c}{a_n} = c\left(1 + b_n\|u_n\|\right) \quad \Leftrightarrow \quad b_n(1 - c\,\|u_n\|) \le c\,.$$

Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt wegen $\|u_n\| \to 0$, $(n \to \infty)$,

$$b_n \le c\,,$$

d.h. die Folge (b_n) ist beschränkt, was ein Widerspruch zur Annahme $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$, $(n \to \infty)$, ist. Also gilt die Behauptung.

4. Sei (u_n) eine Folge in X mit $u_n \to u$, $(n \to \infty)$. Da A monoton ist, ist (Au_n) nach (iii) lokal beschränkt. Aufgrund der Reflexivität von X gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein Element $b \in X^*$ so, dass $Au_{n_k} \rightharpoonup b$, $(k \to \infty)$. Nach Lemma 0.2 (iii) erhalten wir somit $Au = b$, d.h. $Au_{n_k} \rightharpoonup Au$, $(k \to \infty)$. Aber alle schwach konvergenten Teilfolgen von (Au_n) konvergieren schwach gegen Au, denn sonst gäbe es eine Teilfolge mit $Au_{n_l} \rightharpoonup c \neq b$, $(l \to \infty)$. Lemma 0.2 (iii) impliziert wiederum $Au = c$, was ein Widerspruch zu $Au = b$ ist. Somit liefert Lemma 0.3 (iii), dass die gesamte Folge (Au_n) schwach gegen $b = Au$ konvergiert, d.h. A ist demistetig. ■

3.1.1 Der Satz von Browder und Minty

1.5 Satz (Browder, Minty 1963). *Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum mit einer Basis $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Ferner sei $A\colon X \to X^*$ ein monotoner, koerziver und hemistetiger Operator. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von*

$$Au = b\,. \tag{1.6}$$

Die Lösungsmenge ist abgeschlossen, beschränkt und konvex. Falls A strikt monoton ist, ist die Lösung von (1.6) eindeutig.

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Hilfe des *Galerkin Verfahrens*: Wir setzen

$$X_n = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$$

und suchen *approximative Lösungen* u_n der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k \,, \tag{1.7}$$

die das Gleichungssystem

$$g_k(c_k^n) = g_k(u_n) := \langle Au_n - b, w_k \rangle = 0, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{1.8}$$

lösen.

1. Lösbarkeit von (1.8): Dies ist ein nichtlineares System von Gleichungen bezüglich der Vektoren $(c_k^n)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Nach Lemma 1.4 (iv) ist A demistetig, da A monoton und hemistetig ist. Daher ist die Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in sich selbst, gegeben durch $(c_k^n) \mapsto g_k(c_k^n)$ stetig. Weiter gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(c_k^n) c_k^n = \langle Au_n, u_n \rangle - \langle b, u_n \rangle. \tag{1.9}$$

Da A koerziv ist, d.h. $\frac{\langle Au,u \rangle}{\|u\|} \to \infty$, $(\|u\| \to \infty)$, gibt es ein $R > 0$ so, dass für alle $\|u\| \ge R$ gilt:

$$\langle Au, u \rangle \ge \big(1 + 2\|b\|_{X^*}\big)\|u\| > 0 \,.$$

Insbesondere gilt für (c_k^n) mit $\|u_n\| = R$ (vgl. (1.7))

$$\langle Au_n, u_n \rangle \ge \big(1 + 2\,\|b\|_{X^*}\big)\,\|u_n\| \,, \tag{1.10}$$

und somit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} g_k(c_k^n) c_k^n &\ge \big(1 + 2\|b\|_{X^*}\big)\|u_n\| - \|b\|_{X^*}\,\|u_n\| \\ &= \big(1 + \|b\|_{X^*}\big)\|u_n\| > 0 \,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nach Lemma 1.2.26, einer Folgerung aus dem Satz von Brouwer, gibt es also eine Lösung u_n von (1.8) mit

$$\|u_n\|_X \le R \,. \tag{1.12}$$

Die Konstante R ist unabhängig von n, d.h. (1.12) ist eine apriori–Schranke.

2. Beschränktheit von (Au_n): Da A monoton ist, folgt aus Lemma 1.4 (iii), dass A lokal beschränkt ist, d.h.

$$\exists\, r, \delta > 0 : \qquad \|v\| \le r \quad \Rightarrow \quad \|Av\|_{X^*} \le \delta \,. \tag{1.13}$$

Aufgrund der Monotonie von A haben wir für alle $v \in X$

$$\langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \ge 0 \,. \tag{1.14}$$

Da u_n die Gleichung (1.8) löst, d.h. es gilt insbesondere $\langle Au_n, u_n\rangle = \langle b, u_n\rangle$, erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\langle Au_n, u_n\rangle| \le \|b\|_{X^*} \|u_n\| \le \|b\|_{X^*} R\,. \tag{1.15}$$

Die Definition der Norm von Au_n in X^* liefert zusammen mit den obigen Abschätzungen (1.13), (1.15) und (1.14)

$$\begin{aligned}\|Au_n\|_{X^*} &= \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|=r}} \tfrac{1}{r}\langle Au_n, v\rangle \\ &\le \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|=r}} \tfrac{1}{r}\big(\langle Av, v\rangle + \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle\big) \\ &\le \tfrac{1}{r}(\delta r + \|b\|_{X^*}R + \delta R) < \infty\,.\end{aligned}$$

Also ist (Au_n) beschränkt.

3. Konvergenz des Galerkin–Verfahrens: Da X reflexiv ist und die Folge (u_n) beschränkt ist, wie in (1.12) gezeigt wurde, gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \;\text{ in } X \qquad (k \to \infty)\,.$$

Für alle $w \in \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} X_l$ gibt es ein n_0 mit $w \in X_{n_0}$. Da u_n eine Lösung von (1.8) ist, erhalten wir für alle $n \ge n_0$

$$\langle Au_n, w\rangle = \langle b, w\rangle\,,$$

woraus folgt

$$\lim_{n\to\infty}\langle Au_n, w\rangle = \langle b, w\rangle \qquad\qquad \forall w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l\,. \tag{1.16}$$

Nach 2. ist die Folge (Au_n) beschränkt in X^*. Da auch X^* reflexiv ist, gibt es eine Teilfolge (Au_{n_k}) mit

$$Au_{n_k} \rightharpoonup c \;\text{ in } X^* \qquad (k \to \infty)\,.$$

Aber es gilt: $c = b$. Wäre dem nicht so, würde für $w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l$ einerseits aufgrund von (1.16) gelten: $\langle Au_n, w\rangle \to \langle b, w\rangle$ und andererseits $\langle Au_n, w\rangle \to \langle c, w\rangle$ aufgrund der Definition der schwachen Konvergenz in X^*. Dies bedeutet, dass für alle $w \in \bigcup X_l$ gilt: $\langle c-b, w\rangle = 0$. Da $\bigcup X_l$ dicht in X liegt, gibt es zu jedem $v \in X$ eine Folge $(v_k) \subset \bigcup X_l$ mit $v_k \to v$ $(k \to \infty)$. Somit gilt für alle $v \in X$:

$$\langle b - c, v\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle b - c, v_k\rangle = 0,$$

d.h. $b = c$, d.h. $Au_{n_k} \rightharpoonup b$ $(k \to \infty)$. Nach dem Konvergenzprinzip gilt also für die gesamte Folge

$$Au_n \rightharpoonup b \text{ in } X^* \qquad (n \to \infty)\,.$$

Da u_n eine Lösung von (1.8) ist, gilt insbesondere $\langle Au_n, u_n\rangle = \langle b, u_n\rangle$, und somit

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle b, u_n\rangle = \langle b, u\rangle\,.$$

Die Voraussetzungen des Minty–Trickes, Lemma 0.2 (ii), sind demnach erfüllt, und wir erhalten $Au = b$, d.h. u ist eine Lösung der ursprünglichen Operatorgleichung.

4. Eigenschaften der Lösungsmenge: Wir setzen $S = \{u \in X \,|\, Au = b\}$ für gegebenes $b \in X^*$. Dann hat S folgende Eigenschaften:

(a) $S \neq \emptyset$ nach 1. – 3.

(b) S ist beschränkt. Dies folgt aus der Koerzivität von A. Sei S nicht beschränkt. Dann gibt es für alle $R > 0$ ein $u \in S$ mit $\|u\| \geq R > 0$. Aber analog zu 2. haben wir (vgl. (1.9), (1.11))

$$0 = \langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle \geq (1 + \|b\|)\|u\| > 0\,.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, und somit gibt es ein $R_0 > 0$ so, dass für alle $u \in S$ gilt: $\|u\| \leq R_0$.

(c) S ist konvex. Seien u_1, $u_2 \in S$, d.h. $Au_i = b$ für $i = 1, 2$. Für die Konvexkombination $w = tu_1 + (1-t)u_2$, $0 \leq t \leq 1$, und $v \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle b - Av, w - v\rangle &= \langle b - Av, tu_1 + (1-t)u_2 - (t + 1 - t)v\rangle \\ &= \langle b - Av, t(u_1 - v)\rangle + \langle b - Av, (1-t)(u_2 - v)\rangle \\ &= t\langle Au_1 - Av, u_1 - v\rangle + (1-t)\langle Au_2 - Av, u_2 - v\rangle \\ &\geq 0\,,\end{aligned}$$

aufgrund der Monotonie von A. Anwendung von Lemma 0.2 (i) liefert $Aw = b$, d.h. $w \in S$. Also ist S konvex.

(d) S ist abgeschlossen: Für eine Folge $(u_n) \subseteq S$, d.h. $Au_n = b$, mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, und für alle $v \in X$ haben wir:

$$\begin{aligned}\langle b - Av, u - v\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle b - Av, u_n - v\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0\end{aligned}$$

aufgrund der Monotonie von A. Aus Lemma 0.2 (i) folgt $Au = b$, also $u \in S$.

5. Eindeutigkeit: A sei strikt monoton. Falls es zwei Lösungen $u \neq v$ von (1.6) gibt, dann haben wir einerseits $Au = b = Av$ und andererseits folgt aufgrund der strikten Monotonie von A

$$0 < \langle Au - Av, u - v\rangle = \langle b - b, u - v\rangle = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also kann die Gleichung höchstens eine Lösung haben. ■

1.17 Folgerung. *Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum und sei $A\colon X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver und hemistetiger Operator. Dann existiert der Operator $A^{-1}\colon X^* \to X$ und ist strikt monoton und demistetig.*

Beweis. Übung. ∎

3.1.2 Der Nemyckii-Operator

Um den Satz 1.5 von Browder und Minty auf Differentialgleichungen anwenden zu können, benötigen wir den sogenannten **Nemyckii–Operator**

$$(F\mathbf{u})(x) := f(x, \mathbf{u}(x))\,, \tag{1.18}$$

wobei $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{u}\colon G \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$, mit einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^N$. Bezüglich $f\colon G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ machen wir folgende Annahmen:

(i) *Carathéodory–Bedingung*:

$$\begin{aligned} &f(\cdot, \boldsymbol{\eta})\colon x \mapsto f(x, \boldsymbol{\eta}) && \text{ist messbar auf } G \text{ für alle } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n, \\ &f(x, \cdot)\colon \boldsymbol{\eta} \mapsto f(x, \boldsymbol{\eta}) && \text{ist stetig auf } \mathbb{R}^n \text{ für fast alle } x \in G. \end{aligned}$$

(ii) *Wachstumsbedingung*:

$$|f(x, \boldsymbol{\eta})| \le |a(x)| + b \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^{p_i/q}.$$

Wobei $b > 0$ eine feste Zahl ist und $a \in L^q(G)$, $1 \le p_i, q < \infty$, $i = 1, \dots, n$.

1.19 Lemma. *Unter den obigen Annahmen an f und das Gebiet G, ist der in (1.18) definierte Nemyckii–Operator*

$$F\colon \prod_{i=1}^{n} L^{p_i}(G) \to L^q(G)$$

stetig und beschränkt. Es gilt für alle $\mathbf{u} \in \prod_{i=1}^{n} L^{p_i}(G)$ die Abschätzung

$$\|F\mathbf{u}\|_{L^q(G)} \le c\Big(\|a\|_{L^q(G)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_i}(G)}^{p_i/q}\Big). \tag{1.20}$$

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $n = 1, u = u_1, p = p_1$. Der allgemeine Fall folgt analog.

1. Messbarkeit von Fu: Da $u \in L^p(G)$, ist die Funktion $x \mapsto u(x)$ messbar auf G. Also gibt es eine Folge (u_n) von Treppenfunktionen mit

$$u_n \to u \ \text{ fast überall in } G \qquad (n \to \infty)\,.$$

Daher gilt für fast alle $x \in G$

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x, u_n(x)),$$

da f nach Annahme (i) stetig in η ist. Da (u_n) Treppenfunktionen sind haben wir

$$f(x, u_n(x)) = f\big(x, \sum_{j=0}^{M} c_j \chi_{G_j}(x)\big) = \sum_{j=0}^{M} f(x, c_j)\chi_{G_j}(x),$$

mit $c_0 = 0$ und $G_0 = G \setminus \bigcup_{i=1}^{M} G_i$. Somit ist $f(x, u_n(x))$ messbar, da $f(x, c_j)$ messbar ist, und die charakteristischen Funktionen χ_{G_j} messbar sind. Weiterhin ist der Grenzwert messbarer Funktionen messbar und demnach auch Fu.

2. Beschränktheit von F: Es gilt für alle $u \in L^p(G)$

$$\begin{aligned}
\|Fu\|^q_{L^q(G)} &= \int_G \big|f(x, u(x))\big|^q\, dx \\
&\le \int_G \big(|a(x)| + b|u(x)|^{p/q}\big)^q\, dx \\
&\le c \int_G |a(x)|^q + b^q |u(x)|^p\, dx = c\big(\|a\|^q_{L^q(G)} + \|u\|^p_{L^p(G)}\big),
\end{aligned}$$

wobei die Wachstumsbedingung (ii) benutzt wurde und folgende Ungleichung, die für $1 < r < \infty$, $\xi_1, \ldots, \xi_M \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{M} \xi_i\right)^r \le C \sum_{i=1}^{M} \xi_i^r\,. \tag{1.21}$$

In der Tat ist (1.21) nichts anderes ist als die Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^M$. Also ist F beschränkt und erfüllt die Abschätzung (1.20), denn $\|a\|_{L^q}$ und $\|u\|_{L^p}$ sind endlich nach den Voraussetzungen an a und u.

3. Stetigkeit von $F\colon L^p(G) \to L^q(G)$: Sei (u_n) eine Folge mit $u_n \to u$ in $L^p(G)$ $(n \to \infty)$. Demzufolge gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \to u$, $(k \to \infty)$, fast überall in G und es gilt

$$\begin{aligned}
|f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^q &\le C\big(|f(x, u_{n_k}(x))|^q + |f(x, u(x))|^q\big) \\
&\le C\big(|a(x)|^q + b^q |u_{n_k}(x)|^p + |f(x, u(x))|^q\big) \\
&=: h_{n_k}(x)\,,
\end{aligned}$$

wobei die Annahme (ii) benutzt wurden. Nach Integration über G folgt

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|^q_{L^q(G)} \leq \int\limits_G h_{n_k}\, dx\,.$$

Auf der rechten Seite der Ungleichung stehen als Integranden eine Folge von Funktionen h_{n_k} aus $L^1(G)$ mit

$$\begin{aligned} h_{n_k}(x) &\to h(x) \qquad \text{fast überall in } G \quad (k\to\infty)\,,\\ \int\limits_G h_{n_k}(x)\,dx &\to \int\limits_G h(x)\,dx \qquad (k\to\infty)\,, \end{aligned}$$

da $u_n \to u$ in $L^p(G)$, $(n\to\infty)$, also $\|u_n\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$, $(n\to\infty)$. Außerdem gilt: $(Fu_{n_k})(x) \to (Fu)(x)$, $(k\to\infty)$, für fast alle $x\in G$, da f stetig in η ist (Annahme (i)). Daher ist der verallgemeinerte Satz von der dominanten Konvergenz (Satz 1.22) anwendbar, und demzufolge gilt:

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|^q_{L^q} \to 0 \qquad (k\to\infty)\,.$$

Das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iii) liefert nun $Fu_n \to Fu$ in $L^q(G)$, $(n\to\infty)$, da die Argumentation für jede beliebige konvergente Teilfolge gilt. ■

1.22 Satz (Verallgemeinerter Satzes von der dominanten Konvergenz). *Seien f_n und h_n Folgen aus $L^1(\mathbb{R}^N)$, die punktweise fast überall gegen f bzw. h, ebenfalls aus $L^1(\mathbb{R}^N)$, konvergieren. Weiterhin gelte $|f_n|\leq h_n$ und*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} h_n\,dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} h\,dx \qquad (n\to\infty)\,.$$

Dann folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f_n - f|\,dx \to 0 \qquad (n\to\infty)\,.$$

Beweis. Übung ■

3.1.3 Quasilineare elliptische Gleichungen

Als Anwendung des Satzes von Browder und Minty und des Nemyckii–Operators betrachten wir das Randwertproblem für folgende quasilineare elliptische Gleichung

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + su &= f \qquad \text{auf } \Omega\,,\\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Dabei sei $1<p<\infty$, Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega\in C^{0,1}$ und $s\geq 0$. Der kanonische Raum X für die Untersuchung von (1.23) ist der Sobolevraum $W^{1,p}_0(\Omega)$.

Die schwache Formulierung von Problem (1.23) lautet: Für gegebenes $f \in (L^p(\Omega))^*$ suchen wir $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$ so, dass

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + su\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx\,, \qquad \forall \varphi \in X. \tag{1.24}$$

Deshalb definieren wir einen Operator A durch

$$\langle Au, \varphi \rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + su\varphi \, dx, \qquad \forall\, u, \varphi \in X\,, \tag{1.25}$$

und ein Funktional b durch

$$\langle b, \varphi \rangle := \int_\Omega f\varphi \, dx, \qquad \forall\, \varphi \in X\,. \tag{1.26}$$

Hierbei steht $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Dualitätsprodukt in X.

1.27 Lemma. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. Ferner sei $f \in L^{p'}(\Omega), p' = \frac{p}{p-1}$, $p > 1$ und $s \geq 0$. Für $p \geq \frac{2n}{n+2}$ bildet der Operator A definiert in (1.25) den Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ in seinen Dualraum ab, d.h. $A\colon X \to X^*$ und das Funktional b definiert in (1.26) gehört zu X^*. Ferner ist die schwache Formulierung (1.24) äquivalent zur Operatorgleichung in X^**

$$Au = b\,. \tag{1.28}$$

Beweis. Wir setzen $X := W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\|u\|_X := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. Aufgrund der „Nullrandbedingungen" ist die übliche $W_0^{1,p}(\Omega)$–Norm, $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \big(\int_\Omega |u|^p + |\nabla u|^p dx\big)^{\frac{1}{p}}$, äquivalent zur $\|\nabla u\|_{L^p}$–Norm (vgl. [**?**, Theorem 6.28, S. 159]).

1. $A : X \to X^*$: Es gilt für $u, \varphi \in X$

$$\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi \rangle| &\leq \int_\Omega \big| |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi + su\varphi \big| \, dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla \varphi| \, dx + \int_\Omega s|u\varphi| \, dx \\
&\leq \Big(\int_\Omega |\nabla u|^{p'(p-1)} \, dx \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_\Omega |\nabla \varphi|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad + s\Big[\Big(\int_\Omega |u|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big] \\
&= \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla \varphi\|_{L^p} + s\|u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Hölderungleichung und $p' = \frac{p}{p-1}$ benutzt haben. Für $1 \le p < n$ gilt die Einbettung $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ mit $q \le \frac{np}{n-p}$. Insbesondere gilt also $X \hookrightarrow L^2(\Omega)$, falls $2 \le \frac{np}{n-p} \Leftrightarrow p \ge \frac{2n}{n+2}$. Falls $p \ge n$ ist, verwenden wir die Einbettungen $X \hookrightarrow W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $q < \infty$. Also erhalten wir, dass für $p \ge \frac{2n}{n+2}$ und alle $\varphi \in X$ gilt:

$$\|\varphi\|_{L^2} \le C_1 \|\varphi\|_X = C_1 \|\nabla\varphi\|_{L^p} .$$

Insgesamt ergibt sich daher

$$\begin{aligned} |\langle Au, \varphi\rangle| &\le \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla \varphi\|_{L_p} + s\|u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\ &\le C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p})\|\nabla\varphi\|_{L^p} . \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition der Norm von Au in X^* haben wir

$$\|Au\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X \\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle Au, \varphi\rangle| \le C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p}) ,$$

und somit ist $Au \in X^*$ sowie $A\colon X \to X^*$, sofern $p \ge \frac{2n}{n+2}$.

2. Mithilfe der Hölderungleichung und der Definition der dualen Norm ergibt sich

$$\begin{aligned} \|b\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi\in X \\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle b, \varphi\rangle| \le \sup_{\substack{\varphi\in X \\ \|\varphi\|\le 1}} \|f\|_{L^{p'}} \|\varphi\|_{L^p} \\ &\le C\|f\|_{L^{p'}} , \end{aligned}$$

da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, d.h. $\|\varphi\|_{L^p} \le C\|\varphi\|_X$.

3. Aus 1., 2. und den Definitionen von A und b folgt, dass die schwache Formulierung von (1.24) gerade

$$\langle Au, \varphi\rangle = \langle b, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in X$$

ist. Dies ist aber die Operatorgleichung $Au = b$ in X^*. ■

• Im Falle $s = 0$ ist im vorherigen Lemma die Einschränkung $p \ge \frac{2n}{n+2}$ nicht nötig.

1.29 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.27 erfüllt der durch (1.25) gegebene Operator $A\colon X \to X^*$ die Voraussetzungen von Satz 1.5.*

Beweis. 1. $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein separabler und reflexiver Banachraum.

2. A ist strikt monoton: Der Operator A wird durch die Funktion

$$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\zeta} \mapsto |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\boldsymbol{\zeta} \tag{1.30}$$

generiert. Wir haben für $i, j = 1, \dots, n$ und $\boldsymbol{\zeta} \ne \mathbf{0}$

$$\frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j}(\boldsymbol{\zeta}) = |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)\,|\boldsymbol{\zeta}|^{p-4}\zeta_i\zeta_j$$

und somit gilt für alle $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n, 1 < p < \infty$,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j}(\boldsymbol{\zeta})\eta_i\eta_j &= |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\big(|\boldsymbol{\eta}|^2 + (p-2)\frac{(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\eta})^2}{|\boldsymbol{\zeta}|^2}\big) \\ &\geq min(1, p-1)\,|\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}|\boldsymbol{\eta}|^2 .\end{aligned}$$

Für beliebige $u \neq v \in X$ haben wir also

$$\begin{aligned}&\langle Au - Av, u - v\rangle \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \big(g_i(\nabla u) - g_i(\nabla v)\big)(\partial_i u - \partial_i v)\,dx \;+\; s\int_\Omega |u-v|^2\,dx \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{d}{d\tau} g_i\big(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)\big)\,d\tau\,(\partial_i u - \partial_i v)\,dx \;+\; s\int_\Omega |u-v|^2\,dx \\ &= \int_\Omega \int_0^1 \sum_{i-j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial \zeta_j}\big(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)\big)(\partial_j u - \partial_j v)(\partial_i u - \partial_i v)\,d\tau dx \\ &\qquad + s\int_\Omega |u-v|^2\,dx \\ &\geq c\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^2 \int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2}\,d\tau dx \;+\; s\int_\Omega |u-v|^2\,dx \\ &> 0\,,\end{aligned}$$

da $s \geq 0$ und da für den Integranden[1] $|\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} > 0$ gilt mit Ausnahme möglicherweise eines Punktes τ_0, der von $x \in \Omega$ abhängt.

3. A ist koerziv: Wir haben für $u \in X$

$$\langle Au, u\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^p \;+ suu\,dx = \|\nabla u\|_{L^p}^p + s\|u\|_{L^2}^2 \geq \|\nabla u\|_{L^p}^p ,$$

und also

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} \geq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \to \infty \qquad (\|u\|_X \to \infty)\,,$$

falls $p > 1$.

[1] Man beachte, dass das Integral $\int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} d\tau$ endlich ist für $p > 1$.

4. A ist stetig: Sei dazu $(u_n) \subseteq X$ eine Folge mit

$$u_n \to u \text{ in } X \qquad (n \to \infty)\,,$$

d.h. insbesondere $\nabla u_n \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)$, $(n \to \infty)$. Wir setzen $\mathbf{F}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})$, wobei $\mathbf{g}$ in (1.30) definiert ist. Da $\mathbf{g}$ komponentenweise die Abschätzung

$$|g_i(\boldsymbol{\zeta})| \le c|\boldsymbol{\zeta}|^{p-1} = c|\boldsymbol{\zeta}|^{\frac{p}{q}}\,, \quad i = 1, \dots, n\,,$$

mit $q = \frac{p}{p-1}$ erfüllt, ist $\mathbf{F}$ ein vektorwertiger Nemyckii–Operator. Aus Lemma 1.19 folgt daher, dass $\mathbf{F} : (L^p(\Omega))^n \to (L^{p'}(\Omega))^n$ stetig ist, d.h.

$$\mathbf{F}(\nabla u_n) \to \mathbf{F}(\nabla u) \text{ in } \big(L^{p'}(\Omega)\big)^n\,, (n \to \infty)$$

für unsere Folge (u_n). Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\langle Au_n - Au, \varphi\rangle &= \int_\Omega \big(\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\big)\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega s(u_n - u)\varphi\,dx \\
&\le c\,\|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}}\|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u_n - u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\
&\le c\,\big(\|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}} + \|u_n - u\|_X\big)\|\varphi\|_X
\end{aligned}$$

da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ für $p \ge \frac{2n}{n+2}$. Nach der Definition der Norm im Dualraum gilt dann

$$\begin{aligned}
\|Au_n - Au\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi \in X \\ \|\varphi\| \le 1}} |\langle Au_n - Au, \varphi\rangle| \\
&\le c\,(\|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}} + \|u_n - u\|_X).
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ geht die rechte Seite gegen 0, da $u_n \to u$ in X, $(n \to \infty)$, und $\mathbf{F}(\nabla u_n) \to \mathbf{F}(\nabla u)$ in $L^{p'}(\Omega)$ für $n \to \infty$. Also ist der Operator A stetig und damit insbesondere hemistetig. ∎

1.31 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$ und sei $s \ge 0$. Für $p \ge \frac{2n}{n+2}$, $p > 1$ und alle $f \in L^{p'}(\Omega), p' = \frac{p}{p-1}$, existiert genau eine schwache Lösung u von* (1.23)*, d.h.* (1.24) *bzw.* (1.28) *gelten.*

Beweis. Die Lemmata 1.27 und 1.29 liefern, dass wir Satz 1.5 anwenden können, der sofort die Behauptung gibt. ∎

• Satz 1.31 kann man auf die Gleichung

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x, \nabla u)) &= f \quad \text{in } \Omega\,, \\
u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,,
\end{aligned}$$

verallgemeinern, falls $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\mathbf{A}$ ist eine Carathéodory–Funktion,
(ii) $|\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta})| \le C\big(g(x) + |\boldsymbol{\eta}|^{p-1}\big)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ (Wachstumsbedingung),
(iii) $\big(\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{A}(x,\boldsymbol{\zeta})\big) \cdot (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})) \ge 0$, für fast alle x (Monotonie),
(iv) $\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\eta} \ge c\,|\boldsymbol{\eta}|^p - h(x)$, $h \in L^1(\Omega)$ (Koerzivität).

• Satz 1.31 gilt auch für beliebige $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$. Man kann zeigen, dass solche f eine Darstellung der Form

$$f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i + f_0\,,$$

mit $f_i \in L^{p'}(\Omega)$, $i = 0, \dots, n$, besitzen.

3.2 Pseudomonotone Operatoren

3.2.1 Der Satz von Brezis

Ziel dieses Abschittes ist es, eine Theorie zu entwickeln, die es ermöglicht, auch solche quasilinearen elliptischen Gleichungen zu lösen, die einen Term von niedrigerer Ordnung enthalten, der nicht monoton ist. Zum Beispiel kann die Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f \qquad \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

nicht mit Hilfe der Theorie monotoner Operatoren gelöst werden, falls $g(u)u$ nicht positiv ist. Eine Inspektion des Beweises von Satz 1.5 zeigt aber, dass wir allgemeinere Operatoren zulassen können, nämlich *pseudomonotone Operatoren*. Typische Beispiele für pseudomonotone Operatoren sind Operatoren der Form

$$A = A_1 + A_2,$$

wobei $A_1 \colon X \to X^*$ monoton, hemistetig und $A_2 \colon X \to X^*$ stark stetig, also kompakt, ist, d.h. die Theorie pseudomonotoner Operatoren vereinigt Monotonie und Kompaktheit. Im Folgenden werden wir zuerst die allgemeine Theorie entwickeln und diese dann auf (2.1) anwenden.

2.2 Definition. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und $A\colon X \to X^*$ ein Operator. Wir sagen, A* ***genügt der Bedingung*** *(M), falls aus*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } X \qquad (n \to \infty)\,,\\ Au_n &\rightharpoonup b \quad \text{in } X^* \qquad (n \to \infty)\,,\\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle_X &\le \langle b, u\rangle_X \end{aligned}$$

folgt, dass $Au = b$ gilt.

Diese Bedingung ist wichtig, weil sie invariant unter „kompakten“ Perturbationen ist. Außerdem erfüllen monotone Operatoren diese Bedingung. Genauer gilt:

2.3 Lemma. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und $A\colon X \to X^*$, $B\colon X \to X^*$ seien Operatoren. Dann gilt:*

(i) *Ist A monoton und hemistetig, dann genügt A der Bedingung (M).*

(ii) *Wenn A der Bedingung (M) genügt und B stark stetig ist, dann genügt $A+B$ der Bedingung (M).*

Beweis. 1. Dies ist nichts anderes als der Minty Trick aus Lemma 0.2 (ii).

2. Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit

$$\begin{aligned} u_n \rightharpoonup u, \quad Au_n + Bu_n \rightharpoonup b, \qquad (n \to \infty)\,, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n\rangle \le \langle b, u\rangle\,. \end{aligned}$$

Da B stark stetig ist, folgt $Bu_n \to Bu\,, (n \to \infty)$ und also

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \le \langle b - Bu, u\rangle\,, \\ Au_n \rightharpoonup b - Bu \ \text{ in } X^* \qquad (n \to \infty)\,. \end{aligned}$$

Da A der Bedingung (M) genügt, folgt $Au = b - Bu$, d.h. $Au + Bu = b$. ■

2.4 Definition. *Sei $A\colon X \to X^*$ ein Operator auf dem reellen, reflexiven Banachraum X. Dann heißt A* ***pseudomonoton****, falls aus*

$$\begin{aligned} u_n \rightharpoonup u \ \text{ in } X \qquad (n \to \infty)\,, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_X \le 0 \end{aligned}$$

folgt, dass für alle $w \in X$ gilt:

$$\langle Au, u - w\rangle_X \le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X\,.$$

Das folgende Lemma gibt typische Beispiele für pseudomonotone Operatoren an.

2.5 Lemma. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum, und $A, B\colon X \to X^*$ seien Operatoren. Dann gilt*

(i) *Falls A monoton und hemistetig ist, dann ist A pseudomonoton.*

(ii) *Falls A stark stetig ist, dann ist A pseudomonoton.*

(iii) *Falls A und B pseudomonoton sind, dann ist $A+B$ pseudomonoton.*

(iv) *Falls A pseudomonoton ist, dann genügt A der Bedingung (M).*

(v) *Ist A pseudomonoton und lokal beschränkt, dann ist A demistetig.*