Abteilung für Angewandte Mathematik 29.04.2003
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2003 — Blatt 1

Abgabe: **Dienstag, 06.05.2003**

Aufgabe 1

Sei T ein k–kontraktive Abbildung mit $0 \leq k < 1$ auf einem vollständigen metrischen Raum (X, d). Sei $x_0 \in X$, $x_{n+1} := Tx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0), \\ d(x_{n+1}, x) &\leq \frac{k}{1-k} d(x_{n+1}, x_n), \\ d(x_{n+1}, x) &\leq k\, d(x_n, x). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei H ein reeller Hilbertraum.

Definition: Eine *beschränkte Bilinearform* ist eine Abbildung von $H \times H$ nach $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

a) $[u, v]$ ist linear in u und v.

b) Es existiert eine Konstante $K \geq 0$ mit

$$\big|[u, v]\big| \leq K \, \|u\| \, \|v\| \qquad \text{für alle } u, v \in H.$$

Definition: Ein Bilinearform heißt koerziv, wenn eine Konstante $c_0 > 0$ existert mit $[u, u] \geq c_0 \|u\|^2$ für alle $u \in H$. Man beachte, dass wir keine Symmetrie für $[u, v]$ voraussetzen.

Zeigen Sie:

Sei $[\cdot, \cdot]$ eine koerzive, beschränkte Bilinearform auf einem reellen Hilbertraum H. Dann gibt es zu jedem beschränkten, linearen Funktional $f \in H^*$ ein eindeutiges $u \in H$ mit

$$[v, u] = f(v) \qquad \text{für alle } v \in H.$$

Tipp: Betrachte $v \mapsto [v, u]$ + Riesz'scher Darstellungssatz.