Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

29.04.2003

# Funktionalanalysis II

SS 2003 — Blatt 2

Abgabe: **Dienstag, 13.05.2003**

## Aufgabe 1

Sei $1 < p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Geben Sie die Euler–Lagrange–Gleichungen für das folgende Energiefunktional an:

$$I(w) = \int_\Omega |\nabla w|^p \, dx.$$

## Aufgabe 2

Sei $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $C^1$ Funktion. Zeigen Sie:

(a) $L(\mathbf{P}, \mathbf{z}, x) = \eta(\mathbf{z}) \det \mathbf{P}$ mit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ist eine Null–Lagrangefunktion.

(b) Für jede $C^1$ Funktion $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hängt

$$\int_\Omega \eta(\mathbf{u}) \det(\nabla \mathbf{u}) \, dx$$

nur von $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$ ab. Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge mit glattem Rand.

## Aufgabe 3

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f \in L^1(I)$ so, dass

$$\int_I f(x) \, \varphi(x) \, dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Zeigen Sie, dass dann schon $f = 0$ fast überall gilt.

## Aufgabe 4

Sei $K = [a, b]$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$ und $T : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Sei $M$ der Graph von $\varphi$, d.h. $M := \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in [a, b]\}$. Nach Vorlesung existiert nun eine Lösung $u \in [a, b]$ mit

$$(\varphi(x) - Tu)(x - u) \geq 0.$$

Verifizieren Sie dies für $[a, b] = [-3, 0]$, bzw. $[a, b] = [0, 3]$, bzw. $[a, b] = [0.5, 1.5]$ bzw. $[a, b] = [-6, -3]$. Geben Sie die Lösungen konkret an.