Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening 13.05.2003

Funktionalanalysis II

SS 2003 — Blatt 3

Die Webseite zur Vorlesung:
`http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa2_SS03/`

Abgabe: **Dienstag, 20.05.2003**

Aufgabe 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine nicht–leere, kompakte Teilmenge. Ferner sei Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie: Eine Familie $\mathcal{F}$ von stetigen Funktionen $f : M \to Y$ ist genau dann relativ kompakt in $C(M; Y)$, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für jedes $u \in M$ ist $\{f(u) : f \in \mathcal{F}\}$ relativ kompakt in Y,

(b) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig, d.h. für alle $u \in M$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(u, \varepsilon) > 0$, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt:

$$v \in M,\ d(v, u) < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(v) - f(u)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 2

Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $A > 0$ gibt, so dass

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq A\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Aufgabe 3

Sei Ω ein beschränktes glattes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$ mit

$$|f(t)| \leq C\,(1 + |t|)^\alpha$$

für festes $C > 0$ und $0 \leq \alpha < 1$. Zeigen Sie: Das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta v &= f(v) && \text{auf } \Omega, \\ v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

besitzt eine Lösung $u \in L^2(\Omega)$, d.h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$-\int_\Omega u\,\Delta\varphi\,dx = \int f(u)\,\varphi\,dx.$$