Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

20.05.2003

Funktionalanalysis II

SS 2003 — Blatt 4

Abgabe: **Dienstag, 27.05.2003**

Aufgabe 1

Sei X ein reflexiver Banachraum und $S = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner seien $f_n, f \in L^1(S; X)$ und $g \in L^1(S)$ mit

$$\|f_n(s)\|_X \le |g(s)| \qquad \text{für fast alle } s \in S.$$

Zeigen Sie

(a) Aus $f_n(s) \xrightarrow{n} f(s)$ für fast alle $s \in S$ folgt $\int_S f_n(s)\,ds \xrightarrow{n} \int_S f(s)\,ds$.

(b) Aus $f_n(s) \overset{n}{\rightharpoonup} f(s)$ für fast alle $s \in S$ folgt $\int_S f_n(s)\,ds \overset{n}{\rightharpoonup} \int_S f(s)\,ds$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ für alle $1 \le p < \infty$.
Hierbei ist $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ der Raum der $L^p(\mathbb{R}^d)$ Funktionen, deren erste verallgemeinerte Ableitungen wieder in $L^p(\mathbb{R}^d)$ liegt. $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ist versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Der Raum $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ist definiert als der Abschluss der $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ Funktionen in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offenes, beschränktes Gebiet mit glatten Rand.

(a) Sei $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $u_k \rightharpoonup 0$ und sei $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ eine Dirac–Folge zu $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (Glätter), d.h. $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi(x/\varepsilon)$. Sei u_k durch Null fortgesetzt, dann ist $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass $\varphi_\varepsilon * u_k \xrightarrow{k} 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^d$. Folgern Sie, dass $\varphi_\varepsilon * u_k \xrightarrow{k} 0$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

(b) Zeigen Sie, das für alle $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

$$\|v - \varphi_\varepsilon * v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Folgern Sie $u_k \xrightarrow{k} 0$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ mit u_k aus (a).

(c) Zeigen Sie mit (a) und (b), dass $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ kompakt ist.