Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

24.06.2003

Funktionalanalysis II

SS 2003 — Blatt 8

Abgabe: **Dienstag, 01.07.2003**

Aufgabe 1

Beweisen Sie das endliche Durchschnittprinzip, d.h. zeigen Sie:

Eine Menge K ist kompakt genau dann, wenn jedes *zentrierte* System von in K abgeschlossenen Mengen einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Ein System $A_i, i \in I$, heißt *zentriert*, wenn der Durchschnitt beliebiger endlicher Teilsysteme $A_{i_k}, k = 1, \dots, N$, nichtleer ist.

Aufgabe 2

Für $I = [0, T]$ und $1 < p < \infty$ sei

$$W := \left\{ u \in L^p(I;\mathbb{R}) \,\Big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I;\mathbb{R}) \right\}, \quad \|u\|_W = \|u\|_{L^p(I;\mathbb{R})} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^{p'}(I;\mathbb{R})}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass W stetig in $C(I;\mathbb{R})$ einbettet. Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\int_s^t \frac{du}{dt}(\tau) \cdot u(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \left|u(t)\right|^2 - \frac{1}{2} \left|u(s)\right|^2 \tag{2}$$

für alle $s, t \in I$.

Aufgabe 3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ messbar und $1 \leq p_0 \leq p_1 < \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $f \in L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega)$ und alle $0 \leq \theta \leq 1$ gilt

$$\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \, \|f\|_{p_1}^{\theta}$$

wobei

$$\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$