Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

08.07.2003

Funktionalanalysis II

SS 2003 — Blatt 10

Abgabe: **Dienstag, 15.07.2003**

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und sei $1 < p < \infty$. Untersuchen Sie die folgende Gleichung mit Hilfe der Theorie monotoner Operatoren auf Lösungen:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\big(|\nabla \mathbf{u}|^{p-2}\nabla \mathbf{u}\big) + [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} + \nabla \pi &= \mathbf{f} \qquad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \qquad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

mit Randbedingung

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{auf } \partial\Omega.$$

Hierbei ist $\mathbf{f}$ gegeben und $\mathbf{u}$, π sind gesucht.

Ziel dieser Aufgabe ist es, dass Sie selbständig nach geeigneten Räumen für $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}$ und π suchen, so dass diese Aufgabe lösbar wird. Für die Kompaktheit des Wirbelterms $[\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u}$ müssen Sie den Wertebereich von p einschränken.

Aufgabe 2

Sei Ω der unendlich lange Kanal mit Breite 2, d.h. $\Omega = \mathbb{R} \times (-1, 1)$. Geben Sie eine Lösung $\mathbf{u}$ (mit systematischer Herleitung) der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} + \nabla \pi &= 0 \quad \text{auf } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

mit $\pi(1, y) = 1$ und $\pi(-1, y) = -1$ für alle $y \in (-1, 1)$ an.
Tipp: Versuchen Sie den Ansatz $\mathbf{u} = (u_1(y), 0)$, $\pi = \pi(x)$.