Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening 15.07.2003

Funktionalanalysis II

SS 2003 — Blatt 11

Abgabe: **Dienstag, 22.07.2003**

Aufgabe 1

Sei Ω der unendlich lange Kanal mit Breite 2, d.h. $\Omega = \mathbb{R} \times (-1, 1)$, und sei $1 < p < \infty$. Geben Sie eine Lösung $\mathbf{u}$ (mit systematischer Herleitung) der Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(|\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}|^{p-2}\,\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right) + [\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}]\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}\pi &= 0 \quad \text{auf } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

mit $\pi(1, y) = 1$ und $\pi(-1, y) = -1$ für alle $y \in (-1, 1)$ an.

Aufgabe 2

Sei Ω das unendlich lange Rohr im $\mathbb{R}^3$ mit Radius 1, d.h. $\Omega = D_2 \times \mathbb{R}$ mit $D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 + |y|^2 < 1\}$. Geben Sie eine Lösung $\mathbf{u}$ (mit systematischer Herleitung) der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{u} + [\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}]\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}\pi &= 0 \quad \text{auf } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

mit $\pi(x, y, 1) = 1$ und $\pi(x, y, -1) = -1$ für alle $(x, y) \in D_2$ an.
Tipp: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten, d.h. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$. Dann ist

$$\Delta_{x,y,z} f = \partial_r^2 f + \frac{1}{r}\,\partial_r f + \frac{1}{r^2}\,\partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f.$$