Inhaltsverzeichnis

1 Fixpunktsätze 1
1.1 Der Banachsche Fixpunktsatz 2
1.1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 5
1.2 Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder 9
1.2.1 Der Satz von Brouwer 11
1.2.2 Kompakte Operatoren 20
1.2.3 Der Satz von Schauder 26
1.2.4 Anwendung auf Differentialgleichungen 29

2 Integration und Differentiation in Banachräumen 33
2.1 Bochner-Integrale 33
2.1.1 L^p–Räume mit Werten in Banachräumen 38
2.2 Differentiation von Funktionen mit Werten in Banachräumen 40
2.2.1 Satz über implizite Funktionen 45

3 Die Theorie monotoner Operatoren 53
3.1 Monotone Operatoren 57
3.1.1 Der Satz von Browder und Minty 60
3.1.2 Der Nemyckii-Operator 63
3.1.3 Quasilineare elliptische Gleichungen 66
3.2 Pseudomonotone Operatoren 71
3.2.1 Der Satz von Brezis 71
3.2.2 Quasilineare elliptische Gleichungen II 76
3.2.3 Die stationären Navier–Stokes–Gleichungen 79
3.3 Maximal monotone Operatoren 83
3.3.1 Subgradienten 87
3.3.2 Zeitableitungen 93
3.3.3 Die Dualitätsabbildung 97
3.3.4 Der Satz von Browder 98
3.3.5 Variationsungleichungen 104
3.3.6 Evolutionsprobleme 108
3.3.7 Quasilineare parabolische Gleichungen 109

4 Der Abbildungsgrad 119
4.1 Der Abbildungsgrad von Brouwer 119
4.1.1 Die Konstruktion des Abbildungsgrades von Brouwer . 120
4.1.2 Technische Hilfsmittel 122
4.1.3 Erweiterung auf nichtreguläre Punkte und stetige Funktionen 129
4.1.4 Eigenschaften des Abbildungsgrades von Brouwer 131
4.2 Der Abbildungsgrad von Leray-Schauder 135
4.2.1 Abbildungsgrad für endlich–dimensionale Vektorräume 135
4.2.2 Konstruktion des Abbildungsgrades von Leray-Schauder 136
4.2.3 Eigenschaften des Abbildungsgrades von Leray-Schauder 139
4.2.4 Quasilineare elliptische Gleichungen III 142

1 Fixpunktsätze

Eines der wichtigsten Instrumente bei der Behandlung nichtlinearer Probleme mit Methoden der Funktionalanalysis sind *Fixpunktsätze*. Für eine gegebene Abbildung $T\colon A \to B$ bezeichnet man jede Lösung der Gleichung

$$Tx = x$$

als **Fixpunkt**. Fixpunktsätze garantieren, unter bestimmten Bedingungen an die Abbildung $T\colon A \to B$ und die Mengen A, B, die Existenz von Fixpunkten. Ein einfaches Beispiel für eine Abbildung, die keinen Fixpunkt besitzt, ist die Translation

$$Tx = x + x_0 \qquad\qquad x_0 \in X,\ x_0 \neq 0.$$

Die folgenden Beispiele illustrieren, wie die Behandlung nichtlinearer Problemene auf die Lösung von Fixpunktproblemen zurückgeführt werden kann:

- Nullstellenbestimmung von nichtlinearen Funktionen:

  $$F(x) = 0.$$

  Diese Gleichung kann auf verschiedene Weisen in ein Fixpunktproblem für einen Operator T umgeschrieben werden:

  $$\begin{aligned} Tx &= x - F(x) && \text{(einfachste Möglichkeit)}\,, \\ Tx &= x - \omega F(x) && \text{(lineare Relaxation mit } \omega > 0)\,, \\ Tx &= x - \big(F'(x)\big)^{-1} F(x) && \text{(Newtonverfahren)}\,. \end{aligned}$$

- Gewöhnliche Differentialgleichungen:

  $$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t))\,, \\ x(0) &= x_0\,. \end{aligned}$$

  Für eine gegebene stetige Funktion $f : Q \subseteq \mathbb{R} \times X \to X$, wobei X ein Banachraum sein kann, ist dieses Anfangswertproblem äquivalent zu folgender Integralgleichung

  $$x(t) = x_0 + \int_0^t f\big(s, x(s)\big)\, ds\,.$$

  Wenn man die rechte Seite dieser Gleichung mit $T_{x_0}x$ bezeichnet, ist die

Integralgleichung äquivalent zum Fixpunktproblem $T_{x_0}x = x$, wobei der Operator T_{x_0} auf einem geeigneten Funktionenraum definiert ist.

- Nichtlineare partielle Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) && \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

wobei f eine gegebene nichtlineare Funktion ist und die Funktion u gesucht wird. Dieses Problem schreiben wir mit Hilfe von

$$Tu = (-\Delta)^{-1}\big(f(u)\big)$$

in ein Fixpunktproblem um.

1.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Wir wählen einen konstruktiven Zugang zur Lösung des Fixpunktproblems

$$Tx = x\,, \qquad x \in M\,, \tag{1.1}$$

wobei im Allgemeinen T eine nichtlineare Abbildung ist, die auf der Menge M definiert ist. Wir betrachten die *iterative* Folge

$$x_0 \in M\,, \qquad x_{n+1} := Tx_n\,, \qquad n = 0, 1, 2\ldots\,, \tag{1.2}$$

die unter bestimmten Bedingungen gegen einen Fixpunkt von T konvergiert.

1.3 Definition. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Operator $T\colon M \to X$ heißt **k–kontraktiv** genau dann, wenn es ein $k \in (0, 1)$ gibt so, dass für alle $x, y \in M$ gilt:*

$$d(Tx, Ty) \le k\, d(x, y)\,. \tag{1.4}$$

*T heißt **kontraktiv**, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \ne y$ gilt:*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)\,.$$

Der folgende Satz ist von grundlegender Bedeutung für iterative Verfahren, die sowohl zum theoretischen Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und deren Stabilität, als auch zur numerischen Berechnung von approximativen Lösungen und dazugehörigen apriori und aposteriori Fehlerabschätzungen, benutzt werden.

1.5 Satz (Banach, 1922). *Sei $M \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene Menge eines vollständigen metrischen Raums (X, d) und*

$$T\colon M \subseteq X \to M \tag{1.6}$$

ein gegebener k–kontraktiver Operator. Dann gilt:

(i) *Die Gleichung* (1.1) *hat genau eine Lösung* $x \in M$*, d.h.* T *hat genau einen Fixpunkt in* M*.*

(ii) *Die durch* (1.2) *definierte iterative Folge* (x_n) *konvergiert gegen die Lösung* x *für alle Anfangswerte* $x_0 \in M$*.*

Beweis. Sei $x_0 \in M$ beliebig. Aufgrund der Definition der Folge (x_n) und wegen der k–Kontraktivität des Operators T gilt:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \le k\, d(x_{n-1}, x_n) \le \cdots \le k^n\, d(x_0, x_1).$$

Dies und die Dreiecksungleichung liefern

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\le (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+m-1})\, d(x_0, x_1) \\ &= k^n(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-1})\, d(x_0, x_1) \\ &\le \frac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1), \end{aligned} \tag{1.7}$$

wobei die Summenformel für die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{m-1} k^n \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$ benutzt wurde. Da $k < 1$ vorausgesetzt wurde, haben wir gezeigt, dass (x_n) eine Cauchy–Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von X folgt daraus, dass es ein Element $x \in X$ gibt so, dass

$$d(x_n, x) \to 0\,, \qquad (n \to \infty)\,.$$

Da T nach Voraussetzung (1.6) eine Selbstabbildung der Menge M ist, liegen aufgrund der Konstruktion (1.2) alle Folgenglieder in M. Die Menge M ist abgeschlossen und somit liegt auch der Grenzwert x der Folge (x_n) in M. Der Operator T ist k–kontraktiv, also insbesondere stetig, und demzufolge kann man in der Gleichung (1.2) n gegen ∞ gehen lassen und erhält

$$x = Tx\,, \tag{1.8}$$

und damit die Existenz einer Lösung des Problems (1.1).

Es bleibt die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Angenommen, x und y seien zwei Lösungen von (1.1), d.h. $Tx = x$ und $Ty = y$. Aufgrund der k–Kontraktivität des Operators T folgt dann

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \le k\, d(x, y)\,.$$

Wegen $k < 1$ muss also $d(x, y) = 0$ gelten, d.h. $x = y$. ■

• Der Banachsche Fixpunktsatz sagt bildlich gesprochen aus, dass der Graph des Operators T über der Menge M einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt mit der Diagonale, d.h. der Identitätsabbildung I, besitzt.

• Wir wollen uns nun durch die Angabe von Gegenbeispielen davon überzeugen, dass keine der Voraussetzungen des Satzes 1.5 weggelassen werden kann:

(i) $M = \emptyset$, T beliebig
Dann kann T natürlich keinen Fixpunkt haben.

(ii) $M = [0,1]$, $\quad N = [2,3]$, $\quad T\colon M \to N$
T bildet M nicht in sich selbst ab und hat deshalb natürlich keinen Fixpunkt.

(iii) $M = (0,1)$, $\quad Tx = \frac{x}{2}$
M ist nicht abgeschlossen, die Abbildung besitzt keinen Fixpunkt in M.

(iv) $M = \mathbb{R}$, $\quad Tx = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arc\,tan} x$
Für die Ableitung gilt $T'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ und somit folgt nach dem Mittelwertsatz $|Tx - Ty| = |1 - \frac{1}{1+\zeta^2}||x-y| < |x-y|$, d.h. T ist kontraktiv, aber nicht k–kontraktiv; T hat in $\mathbb{R}$ keinen Fixpunkt.

• Für die durch (1.2) definierte iterative Folge kann man weiterhin beweisen, dass für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, gilt:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\le \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0)\,, \\ d(x_{n+1}, x) &\le \frac{k}{1-k}\, d(x_{n+1}, x_n)\,, \\ d(x_{n+1}, x) &\le k\, d(x_n, x)\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Die Ungleichung $(1.9)_1$ nennt man *apriori Fehlerabschätzung*, während $(1.9)_2$ eine *aposteriori Fehlerabschätzung* ist. Ungleichung $(1.9)_3$ zeigt, dass die Methode (1.2) eine *lineare Konvergenzgeschwindigkeit* besitzt.

• Ein Beispiel für ein iteratives Verfahren mit höherer Konvergenzgeschwindigkeit ist das *Newtonverfahren*. Hierbei wird die Gleichung

$$F(x) = 0\,, \tag{1.10}$$

wobei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Lipschitz–stetiger Ableitung ist, in das äquivalente Fixpunktproblem

$$Tx = x\,, \qquad \text{mit} \qquad Tx := x - \big(F'(x)\big)^{-1} F(x)$$

umgeschrieben. Falls $x^\star$ eine Lösung von (1.10) mit $F'(x^\star) \neq 0$ ist, kann man mit Hilfe der Taylorentwicklung zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt so, dass das iterative Verfahren (1.2) für alle Startwerte x_0 mit $|x_0 - x^\star| \le \delta$ konvergiert und eine quadratische Konvergenzgeschwindigkeit besitzt, d.h. es gibt eine Konstante c mit

$$|x_{n+1} - x^\star| \le c\, |x_n - x^\star|^2\ .$$

Diese Aussagen kann man auch auf Operatoren $F\colon X \to X$, wobei X ein Banachraum ist, verallgemeinern.

In vielen Anwendungen hängt T noch von einem zusätzlichen Parameter $p \in P$ ab. Dabei ist P ein metrischer Raum, der sogenannte *Parameterraum*. In diesem Fall betrachtet man das von $p \in P$ abhängige Fixpunktproblem:

$$T_p x_p = x_p\,, \qquad x_p \in M\ ,\ p \in P\,. \tag{1.11}$$

1.12 Folgerung. *Es gelte:*

(i) *Die Operatoren T_p erfüllen für alle $p \in P$ die Voraussetzungen von Satz 1.5, wobei k von p unabhängig ist.*

(ii) *Es existiert ein $p_0 \in P$ so, dass für alle $x \in M$ gilt:* $\lim_{p \to p_0} T_p x = T_{p_0} x.$

Dann existiert für alle $p \in P$ eine eindeutige Lösung x_p von (1.11) und es gilt:

$$\lim_{p \to p_0} x_p = x_{p_0} .$$

Beweis. Sei x_p die eindeutig bestimmte Lösung von (1.11), die nach Satz 1.5 existiert. Für diese Lösungen gilt aufgrund der gleichmäßigen k–Kontraktivität von T_p:

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p_0}) &= d(T_p x_p, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\le d(T_p x_p, T_p x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\le k\, d(x_p, x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \end{aligned}$$

und somit folgt für $p \to p_0$:

$$d(x_p, x_{p_0}) \le \frac{1}{1-k}\, d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \to 0$$

nach Voraussetzung (ii), d.h. x_p konvergiert gegen x_{p_0} für $p \to p_0$. ■

1.1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Als weitere Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes betrachten wir folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\big(t, x(t)\big) , \\ x(t_0) &= p_0 , \end{aligned} \tag{1.13}$$

für eine gewöhnliche Differentialgleichung auf dem Intervall $[t_0 - c,\ t_0 + c]$. Wenn f in einer geeigneten Umgebung von (t_0, p_0) stetig ist, dann ist obiges Anfangswertproblem äquivalent zu folgender Integralgleichung

$$x(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds, \qquad t \in [t_0 - c,\ t_0 + c] , \tag{1.14}$$

wovon man sich leicht durch Integration von (1.13) bzw. Differentation von (1.14) überzeugt. Allerdings wollen wir auch Funktionen f betrachten, deren Werte in einenm Banachraum X liegen können, d.h.

$$f \colon D(f) \subseteq \mathbb{R} \times X \to X .$$

In diesem Fall ist auch die Lösung $x \colon \mathbb{R} \to X$ von (1.13) eine Funktion mit Werten im Banachraum X.

Dadurch ergibt sich ein Problem, denn wir haben weder die Differentation $x'(t)$ noch das Integration $\int f(s)\, ds$ für Funktionen mit Werten in Banachräumen definiert. Im Prinzip sind diese Begriffe analog zu den entsprechenden Begriffen aus der Theorie reellwertiger Funktionen definiert und wir werden uns im nächsten Kapitel 2 (Integration und Differentiation in Banachräumen) damit beschäftigen. Der folgende Beweis des Satzes von Picard, Lindelöf benutzt überhaupt nicht die Struktur von $\mathbb{R}$ und ist deshalb wörtwörtlich auf allgemeine Banachräume X übertragbar. Wir stellen uns zunächst $X = \mathbb{R}$ in den Rechnungen vor.

Die Beweisidee besteht darin die Integralgleichung (1.14) als äquivalente Operatorgleichung

$$T_p\, x = x \tag{1.15}$$

zu schreiben. Hierbei ist T_p ein Operator auf dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $I = [t_0 - c, t_0 + c]$ mit Werten im Banachraum X, den wir mit $C(I; X)$ bezeichnen und mit der kanonischen Norm

$$\|f\|_0 = \max_{t \in I} \|f(t)\|_X \tag{1.16}$$

versehen. Der Raum $C(I; X)$ mit der Norm $\|\cdot\|_0$ ist ein Banachraum, was man analog zum Fall reellwertiger Funktionen beweist. Die Konvergenz einer Folge (f_n) von Funktionen aus $C(I; X)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_0$ ist nichts anderes als die auf I gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f im Banachraum X.

1.17 Satz (Picard 1890, Lindelöf 1894). *Sei X ein Banachraum und sei $Q \subseteq \mathbb{R} \times X$ für gegebene $t_0 \in \mathbb{R}$ und $p_0 \in X$, sowie $a, b > 0$, definiert durch*

$$Q := \big\{(t, x) \in \mathbb{R} \times X \;\big|\; |t - t_0| \le a\,, \|x - p_0\|_X \le b\big\}\,.$$

Ferner sei die stetige Funktion $f \colon Q \to X$ beschränkt und Lipschitz–stetig, d.h. es gibt Konstanten $L, K > 0$ so, dass für alle $(t, x), (t, y) \in Q$ gilt:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|_X &\le K\,, \\ \|f(t,x) - f(t,y)\|_X &\le L\,\|x - y\|_X\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(i) *Es existiert eine eindeutige stetige Lösung $x(\cdot)$ von (1.14) im Intervall $[t_0 - c, t_0 + c]$, mit $c = \min(a, \frac{b}{K})$, die auch die eindeutige Lösung von (1.13) ist.*

(ii) *Die Folge von Approximationen (x_n), gegeben durch $x_0(t) := p_0$ und*

$$x_{n+1}(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_n(s)\big)\, ds, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

konvergiert gleichmäßig auf $[t_0 - c, t_0 + c]$ gegen die Lösung $x(\cdot)$.

(iii) *Sei* $0 < d < c$ *gegeben. Dann besitzt* (1.14) *für alle* p *aus einer genügend kleinen Umgebung von* p_0 *genau eine Lösung* $x_p(\cdot)$*, die auf dem Intervall* $[t_0 - d, t_0 + d]$ *definiert ist. Für* $p \to p_0$ *konvergiert* $x_p(\cdot)$ *gleichmäßig gegen* $x_{p_0}(\cdot)$ *auf dem Intervall* $[t_0 - d, t_0 + d]$.

1.19 Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.17 setzen wir* $k = 1 - \exp(-Lc)$ *und definieren*

$$\|x\|_1 := \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \exp\big(-L|t - t_0|\big) \|x(t)\|_X \tag{1.20}$$

für $x(\cdot) \in C([t_0 - c, t_0 + c]; X)$*. Dann gilt für alle* $n = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\|_1 &\le \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|_1 \,, \\
\|x_{n+1} - x\|_1 &\le \frac{k}{1-k} \|x_{n+1} - x_n\|_1 \,, \\
\|x_{n+1} - x\|_1 &\le k \, \|x_n - x\|_1 \,.
\end{aligned}$$

Beweis (Satz 1.17, Folgerung 1.19). Wir wollen die Integralgleichung (1.14) in eine Operatorgleichung in $C([t_0 - c, t_0 + c]; X)$ umschreiben. Um allerdings das im Satz behauptete Existenzintervall zu erhalten müssen wir den Raum $C([t_0 - c, t_0 + c]; X)$ mit einer äquivalenten Norm versehen. Offensichtlich ist durch (1.20) eine weitere Norm auf $C([t_0 - c, t_0 + c]; X)$ gegeben, die aufgrund der Ungleichungen

$$\exp(-Lc) \, \|f\|_0 \le \|f\|_1 \le \|f\|_0 \,,$$

äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_0$ ist. Somit ist auch $\big(C([t_0 - c, t_0 + c]; X), \|\cdot\|_1\big)$ ist ein Banachraum.

Wir setzen $M := \{g \in C([t_0 - c, t_0 + c]; X) \,\big|\, \|g - p_0\|_0 \le b\}$ und definieren den Operator T_{p_0} durch

$$T_{p_0} \colon M \to \big(C([t_0 - c, t_0 + c]; X), \|\cdot\|_1\big) : x(\cdot) \mapsto y(\cdot) \,, \tag{1.21}$$

wobei

$$y(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big) \, ds \,.$$

Um Satz 1.5 anwenden zu können überprüfen wir dessen Voraussetzungen:

1. Für eine Folge $(x_n) \subseteq M$ mit $x_n \to x$ in $\big(C([t_0 - c, t_0 + c]; X), \|\cdot\|_1\big)$ gilt auch $x_n \to x$ in $\big(C([t_0 - c, t_0 + c]; X), \|\cdot\|_1\big)$, da die beiden Normen äquivalent sind. Aufgrund der Definition von M haben wir

$$\|x_n - p_0\|_0 \le b \,.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert sofort $x \in M$ und somit ist M auch in $\big(C([t_0 - c, t_0 + c]; X), \|\cdot\|_1\big)$ abgeschlossen.