

2. Nach Definition von M gilt $\|x(t) - p_0\|_X \leq b$ für alle $t \in [t_0 - c, t_0 + c]$, d.h. $x(t) \in Q$ für alle $t \in [t_0 - c, t_0 + c]$. Also liefern (1.18)₁ und die Eigenschaften des Integrals (cf. Folgerung ???.??)

$$\begin{aligned} \|T_{p_0}x - p_0\|_0 &= \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\|_X \\ &\leq \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \int_{t_0}^t K ds \leq cK \leq b, \end{aligned}$$

aufgrund der Definition von c . Also bildet der Operator T_{p_0} die Menge M in sich selbst ab, d.h. $T_{p_0} : M \rightarrow M$.

3. Für $x, y \in M$ gilt aufgrund von (1.18)₂ und der Definition der Norm $\|\cdot\|_1$:

$$\begin{aligned} &\|T_{p_0}x - T_{p_0}y\|_1 \\ &= \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \exp(-L|t - t_0|) \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds \right\|_X \\ &\leq \max_t \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\|_X \exp(-L|s - t_0|) \exp(L|s - t_0|) \times \\ &\quad \times \exp(-L|t - t_0|) ds \\ &\leq L \|x - y\|_1 \max_t \int_{t_0}^t \exp(L|s - t_0| - L|t - t_0|) ds \\ &= \|x - y\|_1 \max_t (1 - \exp(-L|t - t_0|)) \\ &\leq k \|x - y\|_1, \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral separat für $t \geq t_0$ und $t \leq t_0$ berechnet wurde und die Definition von $k = 1 - \exp(-Lc) < 1$ benutzt wurde. Somit ist der Operator T_{p_0} k -kontraktiv auf M in $(C([t_0 - c, t_0 + c]; X), \|\cdot\|_1)$.

Nach Satz 1.5 folgt dann, dass genau ein $x \in M$ existiert mit $x = T_{p_0}x$; somit ist Teil (i) des Satzes bewiesen.

Die Behauptungen der Folgerung 1.19 folgen unmittelbar aus (1.9). Insbesondere gilt:

$$\|x_n - x\|_1 \leq \frac{k^n}{1 - k} \|x_0 - x_1\|_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

da $k < 1$. Somit erhalten wir die gleichmäßige Konvergenz $x_n \rightrightarrows x$, ($n \rightarrow \infty$), da $\|\cdot\|_1$ äquivalent ist zu $\|\cdot\|_0$ und Konvergenz bezüglich der Maximumnorm gleichmäßige Konvergenz bedeutet. Damit ist auch Behauptung (ii) bewiesen.

Zum Beweis von (iii) gehen wir analog wie in 1.–3. vor, wobei wir das Intervall $[t_0 - c, t_0 + c]$ durch das kleinere Intervall $[t_0 - d, t_0 + d]$ ersetzen, d.h. wir arbeiten mit dem Raum $(C([t_0 - d, t_0 + d]; X), \|\cdot\|_1)$ und betrachten für $x \in C([t_0 - d, t_0 + d]; X)$ und $p \in X$ den Operator T_p , definiert durch

$$T_p x := p + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

auf der Menge $M = \{g \in C([t_0 - d, t_0 + d]; X) \mid \|g - p_0\|_0 \leq b\}$. Wie in 1.–3. erhalten wir dann, dass für p in einer kleinen Umgebung von p_0 eine eindeutige Lösung x_p von

$$T_p x_p = x_p$$

existiert. Für $p_n \rightarrow p_0$ ($n \rightarrow \infty$) erhalten wir aufgrund der Definition der Operatoren T_{p_0} bzw. T_{p_n} , dass für alle $x \in C([t_0 - d, t_0 + d]; X)$ gilt:

$$\|T_{p_n} x - T_{p_0} x\|_0 = \|p_n - p_0\|_X \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aufgrund der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_0$, sowie nach Folgerung 1.12 gilt dann $\|x_{p_n} - x_{p_0}\|_1 \rightarrow 0$, ($n \rightarrow \infty$), und somit auch die gleichmäßige Konvergenz $x_{p_n} \rightrightarrows x_{p_0}$, ($n \rightarrow \infty$). Damit sind der Satz und die Folgerung bewiesen. ■

1.2 Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder

Im Banachschen Fixpunktsatz werden nur geringe Anforderungen an den zugrundeliegenden Raum gestellt, nämlich ein vollständiger, metrischer Raum ist ausreichend, aber es werden relativ starke Anforderungen an den Operator (k -Kontraktivität) gestellt. In den Sätzen von Brouwer (im \mathbb{R}^n) und Schauder (in unendlich-dimensionalen Räumen) werden nur geringe Anforderungen an die Operatoren gestellt, dafür werden aber stärkere Anforderungen an den zugrundeliegenden Raum gestellt. Beide benutzen ein Analogon des folgenden tiefliegenden topologischen Resultats:

Sei $\overline{B_1(0)}$ der abgeschlossene Einheitskreis im \mathbb{R}^2 . Es gibt keine stetige Abbildung (**Retraktion**)

$$R: \overline{B_1(0)} \rightarrow \partial B_1(0)$$

so, dass für alle Randpunkte $x \in \partial B_1(0)$ gilt:

$$R(x) = x.$$

Man kann sich z.B. vorstellen, man versuche, eine Gummimembran, die den ganzen Kreis bedeckt, an den Rand zu ziehen; sie muß auf jeden Fall zerreißen. Dieses Resultat ist anschaulich klar, aber keineswegs trivial! Wenn man das obige Resultat als gegeben hinnimmt, kann man sich intuitiv klarmachen:

Eine stetige Abbildung $A: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in \overline{B_1(0)}$ mit $Ax = x$.

„BEWEIS:“ Nehmen wir an, dass für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gelte $Ax \neq x$.

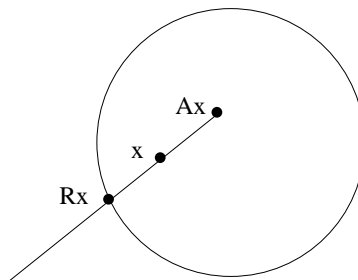


Abb. 1

Mithilfe des Bildes (cf. Beweis von Satz 2.17) sieht man sofort, dass es dann eine stetige Retraktion

$$R: \overline{B_1(0)} \rightarrow \partial B_1(0)$$

mit $R(x) = x$ für alle $x \in \partial B_1(0)$ gibt. Dies ist aber ein Widerspruch zu obiger Aussage. ■

Die analoge Aussage ist in \mathbb{R} einfach zu beweisen.

2.1 Lemma. *Sei $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig. Dann besitzt f in $[a, b]$ einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir setzen

$$g(x) = f(x) - x.$$

Da f das Intervall $[a, b]$ auf sich selbst abbildet, gilt:

$$f(a) \geq a, \quad \text{und} \quad f(b) \leq b,$$

was übertragen auf g bedeutet:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0, \quad \text{und} \quad g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann, dass ein x_0 existiert mit

$$g(x_0) = 0 = f(x_0) - x_0,$$

also ist x_0 der gesuchte Fixpunkt. ■

1.2.1 Der Satz von Brouwer

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten den Satz von Brouwer zu beweisen. Durch einen kurzen Ausflug in die Variationsrechnung erhält man einen einfachen analytischen Beweis.

Die *Variationsrechnung* beschäftigt sich mit der Untersuchung, insbesondere dem Auffinden von Minima, von **Energiefunktionalen** $I(\cdot)$ der Form

$$I(\mathbf{w}) := \int_{\Omega} L(\nabla \mathbf{w}(x), \mathbf{w}(x), x) dx, \quad (2.2)$$

wobei¹ Ω ein glattes Gebiet des \mathbb{R}^n ist und

$$L : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine gegebene glatte Funktion ist. Man nennt L die **Lagrangefunktion** des Energiefunktionals $I(\cdot)$. Wir werden im folgenden die Bezeichnung

$$L = L(\mathbf{P}, \mathbf{z}, x) = L(p_1^1, \dots, p_n^m, z^1, \dots, z^m, x_1, \dots, x_n)$$

für Matrizen² $\mathbf{P} = (p_j^i) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, Vektoren $\mathbf{z} = (z^i) \in \mathbb{R}^m$ und Punkte $x = (x_j) \in \Omega$ benutzen.

Sei $\mathbf{g} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine gegebene glatte Funktion. Man betrachtet (2.2) für glatte Funktionen $\mathbf{w} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w} = (w^1, \dots, w^m)$, die auf dem Rand $\partial\Omega$ mit der Funktion \mathbf{g} übereinstimmen, d.h.

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \quad (2.3)$$

Sei nun $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$ ein glattes **Minimum** von (2.2) unter allen glatten Funktionen die (2.3) erfüllen. Dann ist \mathbf{u} notwendigerweise die Lösung eines Systems von partiellen Differentialgleichungen, den sogenannten *Euler-Lagrange-Gleichungen*. Um dies zu beweisen, betrachten wir für $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^m) \in C_0^\infty(\Omega)$ die reellwertige Funktion

$$i(\tau) := I(\mathbf{u} + \tau \mathbf{v}), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Da auch $\mathbf{u} + \tau \mathbf{v}$ die Randbedingungen (2.3) erfüllt und \mathbf{u} ein Minimum ist, muß i im Punkt 0 ein Minimum haben, d.h. $i'(0) = 0$. Die Ableitung $i'(\tau)$, die man **erste Variation** nennt, kann man explizit berechnen. Es gilt

¹ Der Gradient einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist gegeben durch $\nabla \mathbf{w} = (\partial_j w^i)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$.

² Obere Indizes bezeichnen in diesem Abschnitt Zeilenindizes. Desweiteren benutzen wir für die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion L nach den einzelnen Komponenten der Matrizen bzw. Vektoren die Notation $D_{\mathbf{P}}L = (L_{p_1^1}, \dots, L_{p_n^m})$ bzw. $D_{\mathbf{z}}L = (L_{z^1}, \dots, L_{z^m})$.

$$i(\tau) = \int_{\Omega} L(\nabla \mathbf{u} + \tau \nabla \mathbf{v}, \mathbf{u} + \tau \mathbf{v}, x) dx \quad (2.4)$$

und somit

$$\begin{aligned} i'(\tau) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m L_{p_i^k}(\nabla \mathbf{u} + \tau \nabla \mathbf{v}, \mathbf{u} + \tau \mathbf{v}, x) \partial_i v^k \\ &\quad + \sum_{k=1}^m L_{z^k}(\nabla \mathbf{u} + \tau \nabla \mathbf{v}, \mathbf{u} + \tau \mathbf{v}, x) v^k dx. \end{aligned}$$

Aus $i'(0) = 0$ erhalten wir

$$0 = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m L_{p_i^k}(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}, x) \partial_i v^k + \sum_{k=1}^m L_{z^k}(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}, x) v^k dx.$$

Da diese Identität für alle $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, erhalten wir nach partieller Integration, dass ein Minimum \mathbf{u} des Energiefunktional $I(\cdot)$ folgendes nichtlineare System von partiellen Differentialgleichungen

$$-\sum_{i=1}^n \partial_i (L_{p_i^k}(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}, x)) + L_{z^k}(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}, x) = 0, \quad \text{in } \partial\Omega, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (2.6)$$

erfüllen muss. Das System (2.5) nennt man die dem Energiefunktional $I(\cdot)$ zugehörigen **Euler–Lagrange–Gleichungen**.

Überraschenderweise ist es interessant solche Lagrangefunktionen L zu betrachten für die *alle* glatten Funktionen, eine Lösung von (2.5) sind.

2.7 Definition. Die Funktion L heißt **Null–Lagrangefunktion**, wenn die zugehörige Euler–Lagrange–Gleichungen (2.5) für alle glatten Funktionen erfüllt ist.

Null–Lagrangefunktionen spielen eine entscheidende Rolle in der *nichtlinearen Elastizitätstheorie* und bei der Charakterisierung von schwach folgenstetigen Energiefunktionalen I für Lagrangefunktionen der Form $L(\nabla \mathbf{u})$. Für unsere Zwecke besteht die Bedeutung von Null–Lagrangefunktionen darin, dass der Wert des zugehörigen Energiefunktional $I(\mathbf{w})$ nur von den Randwerten der Funktion \mathbf{w} abhängt.

2.8 Satz. Sei L eine Null–Lagrangefunktion und seien $\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}$ zwei Funktionen aus $C^2(\bar{\Omega})$ mit

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2.9)$$

Dann gilt

$$I(\mathbf{u}) = I(\tilde{\mathbf{u}}). \quad (2.10)$$

Beweis. Wir definieren $j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$j(\tau) := I(\tau \mathbf{u} + (1 - \tau) \tilde{\mathbf{u}}),$$

und erhalten für $\tau \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} j'(\tau) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m L_{p_i^k}(\tau \nabla \mathbf{u} + (1 - \tau) \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \tau \mathbf{u} + (1 - \tau) \tilde{\mathbf{u}}, x) (\partial_i u^k - \partial_i \tilde{u}^k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m L_{z^k}(\tau \nabla \mathbf{u} + (1 - \tau) \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \tau \mathbf{u} + (1 - \tau) \tilde{\mathbf{u}}, x) (u^k - \tilde{u}^k) dx \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} \left(- \sum_{i=1}^n \partial_i (L_{p_i^k}(\tau \nabla \mathbf{u} + (1 - \tau) \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \tau \mathbf{u} + (1 - \tau) \tilde{\mathbf{u}}, x)) \right. \\ &\quad \left. + L_{z^k}(\tau \nabla \mathbf{u} + (1 - \tau) \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \tau \mathbf{u} + (1 - \tau) \tilde{\mathbf{u}}, x) \right) (u^k - \tilde{u}^k) dx = 0, \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Integral partiell integriert haben, sowie (2.9) und den Fakt, dass $\tau \mathbf{u} + (1 - \tau) \tilde{\mathbf{u}}$ eine Lösung der Euler–Lagrange–Gleichungen ist, benutzt haben. Somit ist j auf $[0, 1]$ konstant und (2.10) folgt sofort. ■

Wir benötigen noch folgenden Begriff. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Mit

$$\text{cof } \mathbf{A}$$

bezeichnen wir die **Kofaktormatrix**, deren (k, i) -ter Eintrag aus der Determinante der $(n - 1) \times (n - 1)$ Matrix \mathbf{A}_i^k besteht, die man durch Streichen der k -ten Zeile und der i -ten Spalte erhält, d.h.

$$(\text{cof } \mathbf{A})_i^k := (-1)^{i+k} \det \mathbf{A}_i^k.$$

2.11 Lemma. Sei $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \partial_i (\text{cof } \nabla \mathbf{u})_i^k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Beweis. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass für Matrizen $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

$$(\det \mathbf{P}) \mathbf{I} = \mathbf{P}^{\top} (\text{cof } \mathbf{P}),$$

d.h. wir haben für $i, j = 1, \dots, n$

$$(\det \mathbf{P}) \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n p_i^k (\text{cof } \mathbf{P})_j^k. \quad (2.13)$$

Daraus folgt für $r, s = 1, \dots, n$ (man wähle $j = i = s$ und nutze die Definition

von $\text{cof } P$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det P}{\partial p_s^r} &= \sum_{k=1}^n \delta_{kr} (\text{cof } P)_s^k + p_s^k \frac{\partial (\text{cof } P)_s^k}{\partial p_s^r} \\ &= (\text{cof } P)_s^r. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Wenn man $P = \nabla \mathbf{u}$ in (2.13) einsetzt, nach x_j differenziert und dann das Ergebnis über $j = 1, \dots, n$ aufsummiert, erhält man unter Benutzung von (2.14) für $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{j,r,s=1}^n \delta_{ij} (\text{cof } \nabla \mathbf{u})_s^r \partial_j \partial_s u^r = \sum_{k,j=1}^n \partial_j \partial_i u^k (\text{cof } \nabla \mathbf{u})_j^k + \partial_i u^k \partial_j (\text{cof } \nabla \mathbf{u})_j^k.$$

Dies kann man aber auch als

$$\sum_{k=1}^n \partial_i u^k \left(\sum_{j=1}^n \partial_j (\text{cof } \nabla \mathbf{u})_j^k \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.15)$$

schreiben, d.h. der Vektor $\left(\sum_{j=1}^n \partial_j (\text{cof } \nabla \mathbf{u})_j^k \right)_{k=1, \dots, n}$ ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$, mit $A = \nabla \mathbf{u}$. In einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, für den $\det \nabla \mathbf{u}(x_0) \neq 0$ gilt, erhalten wir sofort

$$\sum_{j=1}^n \partial_j (\text{cof } \nabla \mathbf{u}(x_0))_j^k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Falls allerdings in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt $\det \nabla \mathbf{u}(x_0) = 0$, wählen wir $\varepsilon_0 > 0$ so, dass für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ gilt³: $\det(\nabla \mathbf{u}(x_0) + \varepsilon \mathbf{I}) \neq 0$, und führen die obigen Rechnungen für $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u} + \varepsilon x$ aus. Am Ende führen wir den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durch und die Behauptung folgt. ■

2.16 Satz (Landers 1942, Ball 1976). *Die Determinante*

$$L(P) = \det P, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

ist eine Null-Lagrangefunktion.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für jede glatte Funktion $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n \partial_i (L_{p_i^k}(\nabla \mathbf{u})) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Aus (2.14) wissen wir

³ Dies ist in der Tat möglich, da $\det(\nabla \mathbf{u}(x_0) + \varepsilon \mathbf{I})$ ein Polynom in ε ist und also nur endlich viele Nullstellen haben kann.

$$L_{p_i^k}(\nabla \mathbf{u}) = (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_i^k, \quad i, k = 1, \dots, n$$

und somit ist die Behauptung nichts anderes als Lemma 2.11. ■

• Man kann zeigen, dass $L(\nabla \mathbf{u})$ genau dann eine Null-Lagrangefunktion ist, wenn es Konstanten $a, d \in \mathbb{R}$ und Matrizen $\mathbf{B} = (b_j^i), \mathbf{C} = (c_j^i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt so, dass

$$L(\mathbf{P}) = a + \sum_{i,j=1}^n b_j^i p_j^i + \sum_{i,j=1}^n c_j^i (\operatorname{cof} \mathbf{P})_j^i + d \det \mathbf{P}.$$

Darüber hinaus kann man zeigen, dass Energiefunktionale I für solche Lagrangefunktionen schwach folgenstetig in entsprechenden Funktionenräumen sind. Ein konkretes Beispiel für eine Null-Lagrangefunktion ist

$$L(\mathbf{P}) = \operatorname{tr}(\mathbf{P}^2) - (\operatorname{tr}(\mathbf{P}))^2.$$

Nun können wir den Brouwerschen Fixpunktsatz beweisen.

2.17 Satz (Brouwer, 1912). *Jede stetige Abbildung \mathbf{A} einer abgeschlossenen Kugel des \mathbb{R}^n in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir betrachten o.B.d.A die abgeschlossene n -dimensionale Einheitskugel $B = \overline{B_1(0)}$.

1. Als erstes zeigen wir, dass es keine glatte Funktion

$$\mathbf{w} : B \rightarrow \partial B \tag{2.18}$$

gibt so, dass für alle $x \in \partial B$ gilt

$$\mathbf{w}(x) = x. \tag{2.19}$$

Nehmen wir an, eine solche Funktion \mathbf{w} würde existieren. Sei $\tilde{\mathbf{w}}$ die identische Funktion auf B , d.h. $\tilde{\mathbf{w}}(x) = x$ für alle $x \in B$. Dann gilt $\tilde{\mathbf{w}}(x) = \mathbf{w}(x)$ für alle Randpunkte $x \in \partial \Omega$. Da die Determinante eine Null-Lagrangefunktion ist (Satz 2.16), liefert Satz 2.8

$$\int_B \det \nabla \mathbf{w} \, dx = \int_B \det \nabla \tilde{\mathbf{w}} \, dx = \operatorname{vol}(B) \neq 0, \tag{2.20}$$

da $\det \nabla \tilde{\mathbf{w}} = 1$. Aus (2.18) folgt, dass für alle $x \in B$ gilt: $\|\mathbf{w}(x)\|^2 \equiv 1$, und somit erhalten wir durch Differentiation

$$(\nabla \mathbf{w})^\top \mathbf{w} = \mathbf{0}. \tag{2.21}$$

Da $\|\mathbf{w}\| = 1$ gilt, besagt (2.21), dass 0 ein Eigenwert von $(\nabla \mathbf{w}(x))^\top$ für alle $x \in B$ ist. Somit haben wir $\det \nabla \mathbf{w}(x) = 0$ für alle $x \in B$, was ein Widerspruch zu (2.20) ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Als nächstes zeigen wir, dass es keine stetige Funktion \mathbf{w} gibt, die (2.18), (2.19) erfüllt. Falls \mathbf{w} eine solche Funktion wäre, setzen wir \mathbf{w} durch $\mathbf{w}(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$, auf ganz \mathbb{R}^n fort. Dies und (2.18) impliziert, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|\mathbf{w}(x)\| \geq 1$, insbesondere $\mathbf{w}(x) \neq \mathbf{0}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass für $\mathbf{w}_1 := J_\varepsilon * \mathbf{w}$ immer noch gilt: $\mathbf{w}_1(x) \neq \mathbf{0}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Hierbei ist J_ε der Glättungsoperator (cf. Appendix ???). Ein solches $\varepsilon > 0$ existiert, da für $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2\varepsilon}(0)$ und $\varepsilon > 0$ klein genug gilt:

$$\mathbf{w}_1(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} J_\varepsilon(\|y\|)(x - y) dy = x, \quad (2.22)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\int_{B_\varepsilon(0)} J_\varepsilon(\|y\|) dy = 1$, sowie dass $J_\varepsilon(\|y\|)$ eine radiale symmetrische Funktion ist und y eine antisymmetrische Funktion ist. Weiterhin folgt aus den Eigenschaften des Glättungsoperator J_ε (cf. Appendix ???) dass auf $\overline{B_{2\varepsilon}(0)}$ gilt: $J_\varepsilon * \mathbf{w} \rightrightarrows \mathbf{w}$, ($\varepsilon \rightarrow 0$). Hieraus und aus (2.22) folgt, dass für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|\mathbf{w}_1(x)\| \geq 1/2$, insbesondere $\mathbf{w}_1(x) \neq \mathbf{0}$. Dann würde aber die glatte Funktion

$$\mathbf{w}_2(x) = \frac{2\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$$

(2.18), (2.19) mit $B = \overline{B_{2\varepsilon}(0)}$ erfüllen, was nach 1. nicht möglich ist.

3. Sei nun $\mathbf{A} : B \rightarrow B$ eine stetige Funktion, die keinen Fixpunkt besitzt. Wir definieren $\mathbf{w} : B \rightarrow \partial B$ dadurch, dass $\mathbf{w}(x)$ der Punkt auf dem Rand ∂B ist, der von dem Strahl, der aus $\mathbf{A}(x)$ startet und durch x geht, getroffen wird (cf. Abb. 1). Diese Funktion ist wohl definiert, da nach Voraussetzung $\mathbf{A}(x) \neq x$ für alle $x \in B$ gilt. Offensichtlich ist \mathbf{w} stetig und erfüllt (2.18), (2.19). Dies ist ein Widerspruch zu 2. und der Satz ist bewiesen. ■

2.23 Folgerung. *Jede stetige Abbildung einer zu einer abgeschlossenen Kugel $B \subset \mathbb{R}^n$ homöomorphen Menge M in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $\mathbf{T} : M \rightarrow M$ stetig und $\mathbf{h} : B \rightarrow M$ ein Homöomorphismus, d.h. \mathbf{h} und \mathbf{h}^{-1} sind stetig, eineindeutig und surjektiv. Die durch

$$\mathbf{A} := \mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{h} : B \rightarrow B$$

definierte Abbildung ist stetig. Somit folgt nach dem Satz von Brouwer die Existenz eines Fixpunktes x_0 von \mathbf{A} , d.h.

$$\mathbf{A}x_0 = x_0.$$

Dies bedeutet aber, dass $\mathbf{h}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{h}x_0 = x_0$ gilt. Durch Anwendung von \mathbf{h} auf beiden Seiten dieser Gleichung erhalten wir

$$\mathbf{T}(\mathbf{h}(x_0)) = \mathbf{h}(x_0),$$

d.h. $\mathbf{h}(x_0)$ ist der gesuchte Fixpunkt von \mathbf{T} . ■

• Beispiele von zu abgeschlossenen Kugeln homöomorphen Mengen sind nichtleere, konvexe, kompakte Mengen im \mathbb{R}^n , sowie nichtleere, kompakte, einfach zusammenhängende Mengen im \mathbb{R}^n .

Nichtlineare Gleichungssysteme

Als erste Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes betrachten wir nun folgendes System von nichtlinearen Gleichungen

$$g_i(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.24)$$

wobei $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, stetige, nichtlineare Funktionen sind, die folgender Bedingung genügen:

$$\exists R > 0: \quad \sum_{i=1}^n g_i(x) x_i \geq 0 \quad \forall x \text{ mit } \|x\| = R. \quad (2.25)$$

2.26 Lemma. Seien $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, stetige Funktionen, die der Bedingung (2.25) genügen. Dann existiert eine Lösung x_0 von (2.24) mit $\|x_0\| \leq R$.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass das System (2.24) keine Lösung in $\overline{B_R(0)}$ habe. Für $\mathbf{g} := (g_1, \dots, g_n)$ definieren wir

$$f_i(x) := -R \frac{g_i(x)}{\|\mathbf{g}(x)\|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Da $\|\mathbf{g}(x)\| > 0$ für alle $x \in \overline{B_R(0)}$ gilt, ist $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ wohldefiniert, stetig und bildet die abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(0)}$ in sich selbst ab. Somit folgt mit dem Satz von Brouwer die Existenz eines Fixpunktes x^* von \mathbf{f} in $\overline{B_R(0)}$, d.h.

$$x^* = \mathbf{f}(x^*).$$

Daraus ergibt sich

$$\|x^*\| = R,$$

denn $\|x^*\| = \|f(x^*)\| = \left\| -R \frac{\mathbf{g}(x^*)}{\|\mathbf{g}(x^*)\|} \right\| = R$. Damit gilt nach Bedingung (2.25)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^n g_i(x^*) x_i^* = - \sum_{i=1}^n f_i(x^*) x_i^* \frac{\|\mathbf{g}(x^*)\|}{R} \\ &= -\|x^*\|^2 \frac{\|\mathbf{g}(x^*)\|}{R} = -R \|\mathbf{g}(x^*)\| < 0. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir einen Widerspruch, also muss es eine Lösung von (2.24) in $\overline{B_R(0)}$ geben. ■

Wir wollen nun zeigen, dass auch nichtlineare Ungleichungen mithilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes behandelt werden können. Dieses Problem tritt später bei der Untersuchung von *maximal monotonen* Operatoren auf.

2.27 Lemma (Debrunner, Flor 1964). *Sei X ein Banachraum mit Dualraum X^* und sei $K \subseteq X$ eine konvexe, kompakte und nichtleere Teilmenge von X . Ferner sei $M \subseteq K \times X^*$ eine **monotone Teilmenge**, d.h. für alle $(v, f), (w, g) \in M$ gilt:*

$$\langle f - g, v - w \rangle_X \geq 0. \quad (2.28)$$

Dann existiert für alle stetigen Operatoren $T: K \subseteq X \rightarrow X^$ eine Lösung $u \in K$ von*

$$\langle f - Tu, v - u \rangle_X \geq 0, \quad \forall (v, f) \in M. \quad (2.29)$$

• Wir wollen die Aussage des Lemmas am Beispiel $X = \mathbb{R} = X^*$ illustrieren. Sei $K = [a, b]$ und $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Der Graph von φ

$$M = G(\varphi) := \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$$

ist eine monotone Menge, denn für alle $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$(\varphi(x) - \varphi(y))(x - y) \geq 0.$$

Das Lemma 2.27 besagt dann, dass für alle stetigen Funktionen $T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in [a, b]$ von

$$(\varphi(x) - T(u))(x - u) \geq 0, \quad x \in [a, b]$$

existiert. In Abhängigkeit von den konkreten Funktionen φ und T ist die Lösung entweder einer der Randpunkte des Intervalls $[a, b]$ oder ein Schnittpunkt der beiden Graphen. Als konkretes Beispiel kann man betrachten: $\varphi(x) = x + 2$, $T(x) = x^2$ und $[a, b] = [-3, 0]$ bzw. $[a, b] = [0, 3]$ bzw. $[a, b] = [0.5, 1.5]$ bzw. $[a, b] = [-6, -3]$.

Beweis (Lemma 2.27). Angenommen, (2.29) habe keine Lösung. Wir definieren für $v \in X$ und $f \in X^*$

$$U(v, f) := \{u \in K \mid \langle f - Tu, v - u \rangle_X < 0\}.$$

Die Menge $U(v, f)$ ist offen, denn für gegebene $v \in X$ und $f \in X^*$ ist die Abbildung $u \mapsto \langle f - Tu, v - u \rangle_X$ stetig. Das Problem (2.29) hat nach Annahme keine Lösung und somit gilt:

$$K \subseteq \bigcup_{(v, f) \in M} U(v, f).$$

Da die Menge K kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung, d.h. es existieren $(v_i, f_i) \in M$, $i = 1, \dots, m$, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m U(v_i, f_i).$$

Zu dieser Überdeckung gibt es eine *Zerlegung der Eins*, d.h. es existieren stetige Abbildungen $\beta_i: K \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \beta_i(x) \leq 1$, mit $\text{supp } \beta_i \subseteq U(v_i, f_i)$ so, dass für alle $u \in K$ gilt:

$$\sum_{i=1}^m \beta_i(u) = 1. \quad (2.30)$$

Sei nun K_1 die abgeschlossene, konvexe Hülle der v_i , $i = 1, \dots, m$, d.h. $K_1 = \overline{\text{co}(v_1, \dots, v_m)}$. Für $u \in K_1$ definieren wir

$$p(u) := \sum_{i=1}^m \beta_i(u) v_i,$$

$$q(u) := \sum_{i=1}^m \beta_i(u) f_i.$$

Die Abbildung $p: K_1 \rightarrow K_1$ ist stetig, $\dim K_1 < \infty$, und K_1 ist homöomorph zu einer abgeschlossenen Kugel. Nach Folgerung 2.23 folgt damit die Existenz eines Fixpunktes, d.h.

$$\exists u^* \in K_1 \quad \text{mit} \quad p(u^*) = u^*.$$

Wir setzen für $i, j = 1, \dots, m$

$$\Delta_{ij} := \langle f_i - Tu^*, v_j - u^* \rangle_X.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} + \Delta_{ji} &= \langle f_i - Tu^*, v_j - u^* \rangle_X + \langle f_j - Tu^*, v_i - u^* \rangle_X \\ &= \langle f_i - Tu^*, v_i - u^* \rangle_X - \langle f_i - Tu^*, v_i \rangle_X \\ &\quad + \langle f_i - Tu^*, v_j \rangle_X + \langle f_j - Tu^*, v_j - u^* \rangle_X \\ &\quad - \langle f_j - Tu^*, v_j \rangle_X + \langle f_j - Tu^*, v_i \rangle_X \\ &= \Delta_{ii} + \Delta_{jj} - \langle f_i - f_j, v_i - v_j \rangle_X \\ &\leq \Delta_{ii} + \Delta_{jj}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass $(v_i, f_i) \in M$ und M monoton ist (cf. (2.28)). Wegen $p(u^*) = u^*$, wegen der Definition von p und q , und wegen der Eigenschaft (2.30) der Zerlegung der Eins gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle q(u^*) - Tu^*, p(u^*) - u^* \rangle_X \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^m \beta_i(u^*) f_i - Tu^*, \sum_{j=1}^m \beta_j(u^*) v_j - u^* \right\rangle_X \\
&= \sum_{i,j=1}^m \beta_i(u^*) \beta_j(u^*) \Delta_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^m \beta_i(u^*) \beta_j(u^*) \frac{1}{2} (\Delta_{ij} + \Delta_{ji}) \\
&\leq \sum_{i,j=1}^m \beta_i(u^*) \beta_j(u^*) \frac{1}{2} (\Delta_{ii} + \Delta_{jj}),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

wobei auch die Symmetrie der Matrix mit den Einträgen $\beta_i(u^*)\beta_j(u^*)$ und (2.31) benutzt wurden. Falls für irgendwelche i, j gilt: $\beta_i(u^*)\beta_j(u^*) > 0$, folgt aufgrund der Eigenschaften der Zerlegung der Eins:

$$u^* \in U(v_i, f_i) \cap U(v_j, f_j).$$

Nach Konstruktion von $U(v, f)$ muss dann gelten:

$$\Delta_{ii} < 0 \text{ und } \Delta_{jj} < 0,$$

und es ergibt sich aus (2.32) der Widerspruch $0 < 0$. Also erhalten wir

$$\beta_i(u^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Da aber $u^* \in K_1 \subseteq K$, gibt es aufgrund der Eigenschaften der Zerlegung der Eins einen Index i_0 mit $\beta_{i_0}(u^*) > 0$. Dies ist ein Widerspruch, also existiert eine Lösung des Problems (2.29). ■

1.2.2 Kompakte Operatoren

Wenn wir den Satz von Brouwer auf unendlich-dimensionale Banachräume X übertragen wollen, erkennen wir folgendes Problem: Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B}_1(0)$ ist in X nicht kompakt, was im \mathbb{R}^n gilt und im Beweis des Satzes von Brouwer eine wichtige Rolle gespielt hat. Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass selbst in separablen Hilberträumen die Analogie von Satz 2.17 nicht gilt.

2.33 Satz (Kakutani, 1943). *Sei H ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum. Dann gibt es eine stetige Abbildung $f: H \rightarrow H$, die die abgeschlossene Einheitskugel in sich selbst abbildet und keinen Fixpunkt besitzt.*