Beweis. Wir schreiben wieder abkürzend $B = \overline{B_1(0)}$. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H, d.h. für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt: $(y_n, y_m) = \delta_{nm}$. Wir definieren die Abbildung U, indem wir die Wirkung auf die Basisvektoren angeben, d.h. wir setzen für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$U\colon H \to H\colon y_n \mapsto y_{n+1}\,.$$

Da jedes $x \in H$ bezüglich der Orthonormalbasis eine Darstellung

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i\,,$$

mit $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$, besitzt, können wir die Abbildung U auf beliebige Elemente $x \in H$ erweitern durch:

$$U(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}\,. \tag{2.34}$$

Offensichtlich ist $U\colon H \to H$ linear und beschränkt, d.h. insbesondere stetig, und bildet die Mengen $S_r = \{x \in H \,\big|\, \|x\| = r\}$, $0 < r < \infty$, in sich selbst ab, wie man mit Hilfe der Darstellung (2.34) einfach nachrechnen kann. Wir betrachten nun

$$f(x) := \frac{1}{2}\big(1 - \|x\|\big)y_0 + U(x)\,.$$

Offensichtlich ist f stetig und bildet die Kugel B in sich selbst ab. In der Tat gilt für $\|x\| \le 1$:

$$\|f(x)\| \le \frac{1}{2}\big(1 - \|x\|\big)\|y_0\| + \|U(x)\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|x\| \le 1\,,$$

wobei $\|y_0\| = 1$ und $\|U(x)\| \le \|x\|$ benutzt wurden. Wir nehmen nun an, dass f in B einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein $x_0 \in B$ mit $f(x_0) = x_0$. Dies kann man auch schreiben als

$$x_0 - U(x_0) = \frac{1}{2}\big(1 - \|x_0\|\big)\, y_0\,. \tag{2.35}$$

Für x_0 können folgende drei Fälle auftreten:

1. $x_0 = 0$. Dann folgt aus (2.35)

$$0 = \frac{1}{2}\, y_0\,,$$

   was nicht möglich ist, da y_0 ein Basisvektor ist.

2. $\|x_0\| = 1$. Für $x_0 = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i y_i$ mit $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |\alpha_i|^2 = 1$ erhalten wir aus (2.35)

$$x_0 = U(x_0)\,,$$

was sich mithilfe von (2.34) umgeschrieben werden kann als:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1} .$$

Wir bilden nun das Skalarprodukt mit y_j, $j \in \mathbb{Z}$ und erhalten aufgrund der Eigenschaften der Orthonormalbasis

$$\alpha_j = \alpha_{j-1} \qquad \forall j \in \mathbb{Z} ,$$

d.h. alle α_j sind gleich, und somit ergibt sich der Widerspruch

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j|^2 = \infty \neq 1 .$$

3. $0 < \|x_0\| < 1$. Sei $x_0 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i y_i$, wobei $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\alpha_i|^2 < 1$ gelten muss. Dies eingesetzt im (2.35) ergibt aber:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (\alpha_i - \alpha_{i-1})\, y_i = \frac{1}{2}\big(1 - \|x_0\|\big)\, y_0 ,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \alpha_{-1} &= \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|) > 0 , \\ \alpha_i &= \alpha_{i-1} , \qquad\qquad i \neq 0 . \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\ldots\, \alpha_{-2} = \alpha_{-1} < \alpha_0 = \alpha_1 \ldots ,$$

und somit $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\alpha_i|^2 = \infty$, was ein Widerspruch ist.

In allen der drei möglichen Fälle tritt ein Widerspruch auf, d.h. die Annahme muss falsch sein. Also hat f keinen Fixpunkt. ∎

Aus diesem Gegenbeispiel lernen wir, dass in unendlich–dimensionalen Banachräumen stetige Abbildungen nicht unbedingt einen Fixpunkt haben müssen. Es ist also notwendig, stärkere Forderungen an die Abbildungen zu stellen. Dazu betrachten wir folgenden Ansatz: Wir untersuchen solche Operatoren, die durch „endlich–dimensionale“ Operatoren angenähert werden können, und versuchen, den Satz von Brouwer auf diese anzuwenden. Zur Umsetzung dieser Idee benötigen wir folgende Definition.

2.36 Definition. *Sei $T\colon M \subseteq X \to Y$, wobei X, Y normierte Vektorräume sind. Der Operator T heißt* ***kompakt****, wenn gilt:*

(i) *T ist stetig,*

(ii) *T bildet beschränkte Mengen $B \subseteq M$ in relativ kompakte Mengen ab, d.h. $\overline{T(B)}$ ist kompakt.*

• Das klassische Beispiel eines linearen, kompakten Operators ist ein Integraloperator mit Kern aus L^2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ein Integralkern. Der Integraloperator $A\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist dann definiert durch

$$Au(x) := \int_\Omega K(x,y)u(y)\,dy\,.$$

Mithilfe eines Approximationsargumentes, des Satzes von Arzela–Ascoli und der Abgeschlossneheit der Menge der kompakten Operatoren bezüglich der Operatornorm kann man zeigen, dass A kompakt ist.

Wir erinnern an die Definition einer kompakten Teilmenge M eines topologischen Raumes (X,τ). Eine Menge K heißt **(überdeckungs-) kompakt** genau dann, wenn jede Überdeckung von K durch offene Mengen (U_α) eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h.

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\, N, \alpha_1, \dots, \alpha_N :\; K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_{\alpha_i}\,.$$

Die Menge M heißt **relativ kompakt**, wenn $\overline{M}$ kompakt ist. Die Menge M heißt **folgenkompakt** genau dann, wenn alle Folgen aus M eine in M konvergente Teilfolge besitzen, d.h.

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \qquad \exists\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} :\; x_{n_k} \to x \in M\,.$$

Die Menge M heißt **relativ folgenkompakt** genau dann, wenn alle Folgen (x_n) aus M eine in X konvergente Teilfolge (x_{n_k}) besitzen. Die Menge M eines metrischen Raumes (X,d) heißt **präkompakt** genau dann, wenn sie ein *endliches ε–Netz* besitzt, d.h. wenn sie sich für alle $\varepsilon > 0$ durch endlich viele offene ε–Kugeln überdecken lässt, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N = N(\varepsilon)\,, x_1, \dots, x_N \in M : \quad M \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)\,.$$

Wir haben folgende Resultate (vgl. Zeidler: Applied Functional Analysis):

Lemma. In einem metrischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent

(i) M ist (überdeckungs–) kompakt,

(ii) M ist folgenkompakt,

(iii) M ist präkompakt und vollständig.

Weiterhin gilt:

(iv) M ist relativ kompakt genau dann, wenn M relativ folgenkompakt ist.

(v) Wenn M relativ kompakt ist, dann ist M präkompakt. Die ungekehrte Implikation gilt, falls der metrische Raum vollständig ist.

(vi) Wenn M kompakt ist, dann ist M abgeschlossen und beschränkt.

• Die Definition *kompakter* Mengen und damit zusammenhängende Begriffe und Resultate finden sich im Appendix in den Abschnitten A.1 und A.2. Insbesondere sind die Begriffe kompakt, folgenkompakt und präkompakt in Banachräumen äquivalent (cf. Lemma A.2.1).

• Wir erinnern daran, dass in endlich–dimensionalen normierten Vektorräumen gilt:

M ist genau dann kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.

Aufgrund dieser Äquivalenz überlegt man sich leicht folgende Aussage: Seien X, Y normierten Vektorräume. Ein Operator $T\colon M \subseteq X \to Y$ ist kompakt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\dim Y < \infty$ und T ist stetig und beschränkt.

(ii) $\dim X < \infty$ und T ist stetig und M ist abgeschlossen.

Der folgende Satz zeigt, in welchem Sinne kompakte Operatoren durch „endlich–dimensionale" Operatoren angenähert werden können.

2.37 Satz. *Seien X und Y Banachräume, $M \subseteq X$ eine nichtleere, beschränkte Teilmenge und $T\colon M \subseteq X \to Y$ ein Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist kompakt.*

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein kompakter Operator $P_n\colon M \to Y$, dessen Bildbereich $R(P_n)$ in einem endlich-dimensionalen Teilraum von Y liegt. Die Operatoren P_n approxinieren den Operator T gleichmäßig auf M, d.h. für alle $x \in M$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\|P_n x - Tx\|_Y < \frac{1}{n}\,. \tag{2.38}$$

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen zunächst, dass T stetig ist. Es gilt für alle $x, y \in M$:

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|_Y &\le \|Tx - P_n x\|_Y + \|P_n x - P_n y\|_Y + \|P_n y - Ty\|_Y \\ &\le \frac{1}{n} + \|P_n x - P_n y\|_Y + \frac{1}{n} \\ &\le \frac{3}{n}\,, \end{aligned} \tag{2.39}$$

falls $\|x - y\|_Y$ klein genug ist. Hierbei wurde benutzt, dass P_n für festes n stetig ist. Um die relative Kompaktheit von $T(M)$ nachzuweisen, zeigen wir die Existenz eines endlichen $\frac{3}{n}$–Netzes (cf. Lemma A.2.1). Aus (2.39) folgt für alle $x, y \in M$

$$\|Tx - Ty\|_Y \le \frac{2}{n} + \|P_n x - P_n y\|_Y \,. \tag{2.40}$$

Da P_n kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_N \in M$ mit

$$P_n(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{n}}(P_n x_i)\,,$$

d.h. für alle $y \in M$ existiert ein $x_i, i \in \{1, \ldots, N\}$, mit

$$\|P_n y - P_n x_i\|_Y \le \frac{1}{n}\,.$$

Zusammen mit (2.40) ergibt sich daraus, dass für alle $y \in M$ ein $x_i \in M$ existiert mit

$$\|Tx_i - Ty\|_Y \le \frac{3}{n}\,,$$

d.h. $T(M)$ besitzt ein endliches $\frac{3}{n}$–Netz. Also ist T kompakt.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei T kompakt und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Da M beschränkt ist, ist $T(M)$ relativ kompakt und somit existiert ein endliches $1/n$–Netz (cf. Lemma A.2.1), d.h.

$$\exists\, x_i \in M, i = 1, \ldots, N: \qquad T(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{n}}(Tx_i)\,. \tag{2.41}$$

Wir setzen $y_i := Tx_i, i = 1, \ldots, N$ und konstruieren eine *Zerlegung der Eins*. Für $i = 1, \ldots, N$ definieren wir Funktionen $a_i : M \to \mathbb{R}$ durch

$$a_i(x) := \max\left(\frac{1}{n} - \|Tx - y_i\|_Y\,, 0\right)\,,$$

welche folgende Eigenschaften haben:

(a) Die Funktionen a_i, $i = 1, \ldots, N$, sind stetig, denn T ist stetig und das Maximum zweier stetiger Funktionen ist stetig.

(b) Nach Konstruktion gilt: $a_i(x) \ge 0$.

(c) Für alle $x \in M$ gilt wegen der Überdeckungseigenschaft (2.41) der y_i:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x) > 0\,.$$

(d) Nach Konstruktion impliziert $a_i(x) > 0$ die Ungleichung $\|Tx - y_i\|_Y < \frac{1}{n}$.

Wegen (c) können wir nun für $i = 1, \ldots, N$ definieren

$$\lambda_i(x) := a_i(x) \left(\sum_{j=1}^{N} a_j(x) \right)^{-1} .$$

und erhalten, dass $\lambda_i, i = 1, \ldots, N$ die gewünschte Zerlegung der Eins ist, denn es gilt:

(i) Aufgrund von (a) und (c) sind die Funktionen λ_i, $i = 1, \ldots, N$, stetig.

(ii) Nach Konstruktion gilt: $0 \le \lambda_i \le 1$.

(iii) Für alle $x \in M$ gilt nach Konstruktion: $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1$.

(iv) Aus $\lambda_i(x) > 0$ folgt $\|Tx - y_i\|_Y < \frac{1}{n}$.

Nun definieren wir den sogenannten *Schauderoperator* $P_n \colon M \to M_n$, wobei $M_n = \overline{\mathrm{co}(y_1, \ldots, y_N)} \subseteq \mathrm{span}(y_1, \ldots, y_N)$, durch:

$$P_n(x) := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x)\, y_i \,, \tag{2.42}$$

und zeigen, dass P_n die gewünschten Approximationseigenschaften hat. Aufgrund von (iii), der Konstruktion der P_n und (iv) gilt:

$$\begin{aligned} \|P_n x - Tx\|_Y &= \Big\| P_n x - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x)\, Tx \Big\|_Y \\ &\le \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) \|y_i - Tx\|_Y \le \frac{1}{n} \,. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Nach Konstruktion gilt: $R(P_n) \subseteq \mathrm{span}(y_1, \ldots, y_N)$, d.h. der Bildbereich von P_n liegt in einem endlich-dimensionalen Teilraum von Y. Die Menge $P_n(M)$ und somit auch $\overline{P_n(M)}$ ist beschränkt, denn mit Hilfe von (2.43) folgt

$$\|P_n x\| \le \|P_n x - Tx\| + \|Tx\| \le \frac{1}{n} + c \,,$$

da T kompakt ist und somit $T(M)$ beschränkt ist (cf. Lemma A.2.1). Nach Konstruktion (2.42) von P_n und aufgrund von (i) ist P_n stetig. Der Bildraum $R(P_n)$ ist endlich–dimensional und die Menge $\overline{P_n(M)}$ ist beschränkt und abgeschlossen, d.h. $P_n(M)$ ist relativ kompakt. Insgesamt ist also P_n kompakt. ■

1.2.3 Der Satz von Schauder

2.44 Satz (Schauder, 1930). *Sei $T \colon M \subseteq X \to M$ stetig, wobei X ein Banachraum ist und M eine nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

Beweis. Der Operator T ist kompakt, da $\overline{T(M)} \subseteq M$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst auch kompakt ist. Nach dem Beweis von Satz 2.37 existieren daher kompakte Operatoren $P_n \colon M \to M_n$, wobei $M_n = \overline{\mathrm{co}(y_1, \ldots, y_N)} \subseteq M$, $N = N(n)$, so, dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\|P_n x - Tx\| \le \frac{1}{n}\,.$$

Wir setzen

$$\widetilde{P}_n := P_n|_{M_n}\,.$$

Da M_n homöomorph zu $\overline{B_1(0)}$ im $\mathbb{R}^N$ ist und $\widetilde{P}_n$ die Menge M_n in sich selbst abbildet, liefert Folgerung 2.23 die Existenz von Fixpunkten $x_n \in M_n$, d.h.

$$\widetilde{P}_n x_n = x_n\,. \tag{2.45}$$

Für die Folge der Fixpunkte (x_n) gilt:

$$x_n \in M_n \subseteq M\,.$$

Da M kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit (x_n) bezeichnen, d.h. es existiert $x \in M$ mit

$$x_n \to x \in M \qquad (n \to \infty)\,.$$

Wir zeigen nun, dass dieses x der gesuchte Fixpunkt von T ist. Unter Benutzung von (2.45) erhalten wir:

$$\|Tx - x_n\| = \|Tx - \widetilde{P}_n x_n\| \le \|Tx - Tx_n\| + \|Tx_n - \widetilde{P}_n x_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)\,,$$

aufgrund der Stetigkeit von T und der gleichmäßigen Approximationseigenschaft (2.38) der P_n. Somit ergibt sich

$$Tx = x\,,$$

d.h. x ist ein Fixpunkt von T. ■

Wir wollen noch eine alternative Version des Satzes von Schauder beweisen, die häufiger benutzt wird. In der Praxis ist es nämlich oft leichter, die Kompaktheit eines Operators zu zeigen als die Kompaktheit einer Teilmenge eines unendlich–dimensionalen Banachraumes. Dafür benötigen wir folgendes Lemma.

2.46 Lemma (Mazur, 1930). *Sei X ein Banachraum und $M \subseteq X$ relativ kompakt. Dann ist auch $\mathrm{co}(M)$ relativ kompakt.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da M relativ kompakt ist, existiert ein endliches $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz, d.h. es existieren $z_1, \ldots, z_n \in M$ so, dass für alle $x \in M$ ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ existiert mit

$$\|x - z_j\| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.47}$$

Dies erlaubt es uns, eine Funktion $v : M \to \{1, \dots, n\}$ durch folgende Vorschrift zu definieren:

$$v(x) = j\,,$$

wobei j der kleinste Index ist für den (2.47) gilt. Nach Definition von $co(M)$ gibt es für alle $y \in co(M)$, $\alpha_i \in [0,1]$, $y_i \in M$ mit $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. Aufgrund dieser Darstellung von $y \in co(M)$ und der Definition von v erhalten wir

$$\Big\| y - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_{v(y_i)} \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (y_i - z_{v(y_i)}) \Big\| \le \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|y_i - z_{v(y_i)}\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_{v(y_i)} \in K := co(z_1, \dots, z_n)$ gilt, haben wir gezeigt:

$$co(M) \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\,. \tag{2.48}$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$\psi : [0,1]^n \times \{z_1\} \times \ldots \times \{z_n\} \to X : (\alpha_1, \dots, \alpha_n, z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\,,$$

die offensichtlich stetig ist. Für die Restriktion der Funktion ψ auf die Menge $A = \big\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0,1]^n \;\big|\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\big\}$ gilt: $\psi(A \times \{z_1\} \times \ldots \times \{z_n\}) = K$. Somit ist K das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung, und also selbst kompakt , d.h.

$$\exists\, k_1, \dots, k_N \in K : \quad K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(k_i)\,. \tag{2.49}$$

Aus (2.48) und (2.49) folgt dann insgesamt

$$co(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon}(k_i)\,,$$

d.h. $co(M)$ ist relativ kompakt. ∎

2.50 Folgerung (Schauder). *Sei $T\colon M \subseteq X \to M$ ein kompakter Operator, wobei X ein Banachraum ist, und M eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge von X ist. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $N = \overline{co(T(M))} \subseteq M$. Wir überprüfen die Voraussetzungen von Satz 2.44. Nach Lemma 2.46 ist N kompakt, konvex und nichtleer. Der Operator T ist stetig, denn T ist kompakt. Weiter bildet T die Menge N in sich selbst ab, denn es gilt:

$$N \subseteq M \quad \Rightarrow \quad T(N) \subseteq T(M) \quad \Rightarrow \quad T(N) \subseteq \overline{co(T(N))} \subseteq \overline{co(T(M))} = N\,.$$

Damit folgt nach Satz 2.44, dass T einen Fixpunkt besitzt. ■

1.2.4 Anwendung auf Differentialgleichungen

Wir betrachten zuerst noch einmal die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\big(t, x(t)\big)\,, \\ x(t_0) &= y_0\,, \end{aligned} \tag{2.51}$$

wobei wir diesmal nur voraussetzen, dass $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig ist, und nicht wie beim Satz von Picard–Lindelöf Lipschitz–stetig.

2.52 Satz (Peano, 1980). *Seien $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$ gegeben und sei*

$$Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |t - t_0| \le a, |x - y_0| \le b\}\,.$$

Die Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt, d.h. für alle $(t,x) \in Q$ gilt:

$$|f(t,x)| \le K\,.$$

Dann hat das Anfangswertproblem (2.51) eine stetig differenzierbare Lösung $x(\cdot)$, die im Intervall $[t_0 - c, t_0 + c]$, mit $c = \min(a, \frac{K}{b})$, definiert ist.

Beweis. Da f stetig ist, ist die Differentialgleichung (2.51) äquivalent zur Integralgleichung

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds\,.$$

Wir definieren nun den Operator $T\colon M \subset X \to X$ durch

$$T\,x(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds\,.$$

Das Anfangswertproblem (2.51) ist also äquivalent zu folgendem Fixpunktproblem:

$$Tx = x\,, \qquad\qquad x \in M\,,$$

mit

$$X = C([t_0 - c, t_0 + c]; \mathbb{R}), \qquad \|x\|_0 = \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} |x(t)|,$$
$$M = \{x \in X \,\big|\, \|x - y_0\|_0 \le b\}.$$

Die Menge M ist nichtleer, konvex, abgeschlossen und beschränkt. Wie im Beweis vom Satz von Picard–Lindelöf folgt, dass der Operator T die Menge M in sich selbst abbildet. Es ist noch zu zeigen, dass T kompakt ist. Dazu verwenden wir den Satz von Arzela–Ascoli. Für alle $t \in [t_0 - c, t_0 + c]$ und $x \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} |T\,x(t)| &\le |y_0| + \int_{t_0}^{t} \big|f(s, x(s))\big|\, ds \\ &\le |y_0| + c\,K \le c_0\,, \end{aligned}$$

d.h. $T(M)$ ist gleichmäßig beschränkt. Weiter gilt für alle $t_1, t_2 \in [t_0 - c, t_0 + c]$ und $x \in M$:

$$|T\,x(t_1) - T\,x(t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} \big|f(s, x(s))\big|\, ds \le K|t_2 - t_1|\,,$$

d.h. $T(M)$ ist gleichgradig stetig. Der Satz von Arzela–Ascoli liefert also, dass $T(M)$ relativ kompakt in $C([t_0 - c, t_0 + c]; \mathbb{R})$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass T stetig ist: Konvergiere $x_n \to x$, $(n \to \infty)$, bezüglich der Norm in X, d.h. x_n konvergiert gleichmäßig gegen x auf $[t_0 - c, t_0 + c]$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} |T\,x_n(t) - T\,x(t)| &\le \int_{t_0}^{t} \big|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\big|\, ds \\ &\le c\,\varepsilon. \end{aligned}$$

da f auf Q gleichmäßig stetig ist und $|t - t_0| \le c$. Nach Folgerung 2.50 folgt dann: Es gibt einen Fixpunkt von T, d.h. eine Lösung von (2.51). Aus (2.51) folgt sofort, dass die Lösung x stetig differenzierbar ist, da f stetig ist. ∎

Wir betrachten nun die nichtlineare partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \qquad &&\text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 &&\text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.53}$$

wobei Ω ein beschränktes glattes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ ist und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

2.54 Satz. *Sei Ω ein beschränktes glattes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$ eine gegebene beschränkte Funktion. Dann besitzt das Problem (2.53) eine Lösung $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, d.h. für alle $\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:*

$$\int_\Omega \nabla u \,\nabla\varphi \,dx = \int_\Omega f(u)\,\varphi\,dx\,. \tag{2.55}$$

Beweis. Durch

$$[u,v] := \int_\Omega \nabla u\,\nabla v\,dx\,, \qquad u,v\in H_0^{1,2}(\Omega)\,,$$

ist eine *beschränkte, koerzive Bilinearform* auf dem Hilbertraum $H_0^{1,2}(\Omega)$ definiert, d.h. für alle $u,v\in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} \big|[u,v]\big| &\le c_0\,\|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{H_0^{1,2}(\Omega)}\,,\\ [u,u] &\ge c_1\,\|u\|^2_{H_0^{1,2}(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Ferner ist offensichtlich durch

$$G(v) := \int_\Omega g\,v\,dx\,,$$

ein beschränktes lineares Funktional auf $H_0^{1,2}(\Omega)$ gegeben. Nach dem Satz von Lax–Milgram besitzt somit das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta v &= g \qquad \text{in } \Omega\,,\\ v &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.56}$$

für alle $g\in L^2(\Omega)$ genau eine **schwache Lösung** $v\in H_0^{1,2}(\Omega)$, d.h. für alle $\varphi\in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \nabla v\,\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega g\,\varphi\,dx\,. \tag{2.57}$$

Deshalb können wir einen Lösungsoperator durch

$$B := (-\Delta)^{-1} : g\mapsto v \tag{2.58}$$

definieren. Der Operator B ist kompakt, wenn man ihn als Operator von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ auffasst, und stetig wenn man ihn als Operator von $L^2(\Omega)$ nach $H_0^{1,2}(\Omega)$ auffasst. In der Tat, wenn wir in (2.57) $\varphi = v$ wählen, erhalten wir mithilfe der Hölder–, Poincaré– und Young–Ungleichung die *apriori Abschätzung*

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \le c\,\|g\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{2.59}$$

Wenn wir nun benutzen, dass auf $H_0^{1,2}(\Omega)$ die Normen $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|\nabla\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ äquivalent sind, und die Definition des Lösungsoperators benutzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|Bg\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} &\le c\,\|g\|_{L^2(\Omega)}\,,\\ \|Bg\|_{L^2(\Omega)} &\le c\,\|g\|_{L^2(\Omega)}\,, \end{aligned} \tag{2.60}$$

wobei die zweite Ungleichung sofort aus der ersten folgt. Aus (2.60) folgt, dass sowohl $B\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ als auch $B\colon L^2(\Omega) \to H_0^{1,2}(\Omega)$ stetig sind, da B linear und beschränkt ist. Da B aufgrund von $(2.60)_2$ beschränkte Mengen in $L^2(\Omega)$ in beschränkte Mengen in $H_0^{1,2}(\Omega)$ abbildet und die Einbettung $H_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ nach dem Rellichschen Einbettungssatz kompakt ist, erhalten wir, dass $B\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt ist.

Die schwache Formulierung (2.55) des Problems (2.53) ist nun äquivalent zum Fixpunktproblem

$$Tu = u\,, \tag{2.61}$$

wobei $T\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert ist durch

$$Tu := B\big(f(u)\big)\,.$$

Der Operator T ist wohldefiniert, da auf Grund der Voraussetzungen an f für alle $u \in L^2(\Omega)$ gilt:

$$\|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \le |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\,.$$

Dies und (2.60) liefern

$$\|Tu\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} \le c\,\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} =: c_1\,. \tag{2.62}$$

Also bildet T die abgeschlossene Kugel $\overline{B_{c_1}(0)}$ des $L^2(\Omega)$ in die abgeschlossene Kugel $\overline{B_{c_1}(0)}$ des $H_0^{1,2}(\Omega)$ ab. Somit ist der Bildbereich $R(T)$ relativ kompakt. Der Operator T ist auch stetig. Aus $u_n \to u$, $(n \to \infty)$ in $L^2(\Omega)$ folgt für eine Teilfolge $u_{n_k}(x) \to u(x)$, $(k \to \infty)$, fast überall in Ω. Da B linear und beschränkt ist, erhalten wir daraus und unter Benutzung von (2.60)

$$\|Tu_{n_k} - Tu\|_{L^2(\Omega)} = \|B\big(f(u_{n_k}) - f(u)\big)\|_{L^2(\Omega)} \le c\,\|f(u_{n_k}) - f(u)\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen Null aufgrund des Satzes von Lebesgue über majorisierte Konvergenz. Dies gilt jedoch für jede fast überall konvergente Teilfolge von (u_n) und somit auch für die gesamte Folge (cf. Lemma 3.0.4). Insgesamt ist also $T\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein kompakter Operator, der die abgeschlossene Kugel $\overline{B_{c_1}(0)}$ des $L^2(\Omega)$ in sich selbst abbildet. Folgerung 2.50 liefert sofort die Existenz eines Fixpunktes $u \in \overline{B_{c_1}(0)} \subset L^2(\Omega)$ von T. Aufgrund von (2.61) und (2.62) erhalten wir, dass der Fixpunkt u in $H_0^{1,2}(\Omega)$ liegt und aufgrund der Definition von T bzw. B die schwache Formulierung (2.55) erfüllt. ■

• Die Behauptung des Satzes kann leicht auf den Fall einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \le c\left(1 + |x|^\alpha\right),$$

mit $0 \le \alpha < 1$, erweitert werden. Um die Analogie von (2.62) zu erhalten muss man $0 \le \alpha < 1$ und die Young–Ungleichung benutzen.

2 Integration und Differentiation in Banachräumen

Die Begriffe des *Integrals* und der *Ableitung* für Funktionen $\mathbf{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sind aus den Grundvorlesungen bekannt. Insbesondere sind das Lebesgue–Integral $\int_\Omega f_i(x)\,dx$, $i = 1, \ldots, n$, wobei $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, und das Differential $Df(x)$ bekannt. Wir möchten nun diese Begriffe auf Funktionen

$$f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to X\,,$$

erweitern, wobei X ein Banachraum ist. Das Vorgehen in Falle von Funktionen mit Werten in Banachräumen ist analog zum Fall vektorwertiger reeller Funktionen. Alle Sätze und Resultate die wir für Funktionen mit Werten in Banachräumen kennenlernen werden haben eine Entsprechung in der Theorie reeller Funktionen, aber an manchen Stellen muß man aufpassen!

2.1 Bochner–Integrale

Der Einfachheit halber und in Anbetracht der Anwendung auf Evolutionsprobleme betrachten wir nur Funktionen

$$f\colon S \to X\,,$$

mit Lebesgue–messbaren eindimensionalem Definitionsbereich

$$S \subseteq \mathbb{R},$$

und beschränken uns auf den Fall, dass X ein reeller reflexiver Banachraum ist. Diese Voraussetzungen gelten für den gesamten Paragraphen. Im folgendem bezeichnen wir das *Lebesgue Maß* einer Lebesgue–messbaren Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $m(A)$.

1.1 Definition. *Eine Funktion $f\colon S \to X$ heißt **Treppenfunktion**, wenn sie sich schreiben läßt als*

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(s)\, x_i\,,$$

wobei $x_i \in X$ *und* $B_i \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ *Lebesgue–messbare Mengen sind, für die gilt:* $m(B_i) < \infty$*,* $B_i \cap B_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$*. Die charakteristische Funktion* χ_B *ist wie definiert durch*

$$\chi_B(s) = \begin{cases} 0\,, & s \notin B\,, \\ 1\,, & s \in B\,. \end{cases}$$

1.2 Definition. *Für eine Treppenfunktion* f *definieren wir das* ***Bochner–Integral*** *durch*

$$\int_S f(s)\,ds := \sum_{i=1}^n m(B_i)\,x_i\,.$$

• Man beachte, dass das Bochner-Integral $\int_S f(s)\,ds$ ein Element des Banachraumes X ist.

In der Lebesgue Theorie reellwertiger Funktionen kann man zeigen, dass eine Funktion genau dann messbar ist, wenn sie der punktweise Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen ist. Weiterhin kann man das Lebesgue Integral einer nichtnegativen reellen Funktion als den Grenzwert von Integralen einer geeigneten Folge von Treppenfunktionen charakterisieren. Im Falle von Funktionen mit Werten in Banachräumen werden diese Charakterisierungen als Definitionen benutzt.

1.3 Definition. *Eine Funktion* $f\colon S \to X$ *heißt* ***Bochner–messbar****, falls eine Folge* (f_n) *von Treppenfunktionen* $f_n\colon S \to X$ *existiert so, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(s) - f(s)\|_X = 0 \qquad \text{fast überall in } S\,. \tag{1.4}$$

Genügt eine solche Folge der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n(s) - f(s)\|_X\,ds = 0\,, \tag{1.5}$$

so heißt f ***Bochner–integrierbar****, und wir definieren das* ***Bochner–Integral*** *als*

$$\int_S f(s)\,ds := \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(s)\,ds\,. \tag{1.6}$$

• Das folgende Lemma, angewendet auf $f_n - f$, stellt sicher, dass die Bedingung (1.5) Sinn macht.

1.7 Lemma. *Wenn* $f\colon S \to X$ *Bochner–messbar ist, dann ist die Funktion* $\|f(\cdot)\|\colon S \to \mathbb{R}$ *Lebesgue–messbar.*

Beweis. Sei $f\colon S \to X$ eine Bochner–messbare Funktion. Dann gibt es eine Folge $f_n\colon S \to X$ von Treppenfunktionen für die (1.4) gilt. Offensichtlich sind $\|f_n(\cdot)\|\colon S \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. Aufgrund von (1.4) haben wir für fast alle $s \in S$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(s)\| = \|f(s)\|\,,$$

und somit ist die Funktion $\|f(\cdot)\|$ als Grenzwert einer Folge Lebesgue–messbarer Funktionen selbst Lebesgue–messbar. ■

• Wir müssen uns noch davon überzeugen, dass der Grenzwert in (1.6) existiert. In der Tat haben wir für $n, k \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \int_S f_n\, ds - \int_S f_k\, ds \Big\| = \Big\| \int_S f_n - f_k\, ds \Big\| \le \int_S \|f_n - f_k\|\, ds\,,$$

da (f_n) Treppenfunktionen sind und es sich somit um endliche Summen von Elementen aus X handelt. Die rechte Seite können wir abschätzen durch

$$\int_S \|f_n - f\| + \|f - f_k\|\, ds \to 0 \qquad (n, k \to \infty)\,,$$

aufgrund der Voraussetzung (1.5). Damit ist gezeigt, dass $\big(\int_S f_n\, ds\big)$ eine Cauchyfolge in X bildet. Aufgrund der Vollständigkeit von X existiert also der Grenzwert in (1.6).

• Der Grenzwert in (1.6) ist von der gewählten Folge unabhängig, da zwei Folgen zu einer kombiniert werden können und der Grenzwert existiert.

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen Bochner–messbaren Funktionen und Lebesgue–messbaren Funktionen her.

1.8 Satz (Pettis, 1938). *Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist $f\colon S \to X$ genau dann Bochner–messbar, wenn für alle $F \in X^*$ die Funktion $\langle F, f(\cdot)\rangle_X : S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–messbar ist.*

Beweis. 1. Sei f Bochner–messbar. Nach Definition gibt es dann eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen so, dass für fast alle $s \in S$ gilt:

$$f_n(s) \to f(s) \ \text{ in } X\,, \qquad (n \to \infty)\,.$$

Da starke Konvergenz in X schwache Konvergenz in X impliziert, folgt damit auch, dass für alle $F \in X^*$ und fast alle $s \in S$ gilt:

$$\langle F, f_n(s)\rangle \to \langle F, f(s)\rangle \qquad (n \to \infty)\,. \tag{1.9}$$

Offensichtlich sind $\langle F, f_n(\cdot)\rangle : S \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. Was zusammen mit (1.9) impliziert, dass $\langle F, f(\cdot)\rangle : S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–messbar ist.

2. Der Beweis dieser Richtung ist sehr technisch und kann in [?, S. 131] nachgelesen werden. ■

1.10 Folgerung. *Sei X ein separabler Banachraum. Ferner sei $f\colon S \to X$ eine Funktion und seien $f_n\colon S \to X, n \in \mathbb{N}$, Bochner–messbare Funktionen so, dass für fast alle $s \in S$*

$$f_n(s) \rightharpoonup f(s) \qquad (n \to \infty)\,. \tag{1.11}$$

Dann ist f Bochner–messbar.

Beweis. Da die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, Bochner–messbar sind, folgt aufgrund von Satz 1.8, dass für alle $F \in X^*$ auch die reellwertigen Funktionen $\langle F, f_n(\cdot)\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, Lebesgue–messbar sind. Aus (1.11) folgern wir für alle $F \in X^*$ und fast alle $s \in S$

$$\langle F, f_n(s)\rangle \to \langle F, f(s)\rangle \qquad (n \to \infty)\,.$$

Somit ist auch der Grenzwert $\langle F, f(\cdot)\rangle$ Lebesgue–messbar. Nochmalige Anwendung von Satz 1.8 liefert dann, dass f Bochner–messbar ist. ∎

1.12 Satz (Bochner, 1933). *Eine Bochner–messbare Funktion $f\colon S \to X$ ist genau dann Bochner–integrierbar, wenn die Funktion $\|f(\cdot)\|_X\colon S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–integrierbar ist.*

Beweis. 1. Sei $f\colon S \to X$ Bochner–integrierbar und sei (f_n) eine Folge von Treppenfunktionen so, dass für fast alle $s \in S$ gilt:

$$f_n(s) \to f(s) \ \text{ in } \ X \qquad (n \to \infty)\,. \tag{1.13}$$

Nach Lemma 1.7 sind $\|f_n(\cdot)\|\colon S \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Lebesgue–messbar, was zusammen mit (1.13) liefert, dass auch $\|f(\cdot)\|$ Lebesgue–messbar ist. Wir haben folgende punktweise Abschätzung:

$$\|f(s)\| \le \|f_n(s)\| + \|f(s) - f_n(s)\|\,,$$

und somit ergibt sich für ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_S \|f(s)\|\,ds \le \int\limits_S \|f_{n_0}(s)\|\,ds + \int\limits_S \|f(s) - f_{n_0}(s)\|\,ds < \infty\,,$$

da f_{n_0} eine Treppenfunktion ist und der Grenzwert in (1.5) existiert. Also ist $\|f(\cdot)\|$ Lebesgue–integrierbar.
2. Sei f Bochner–messbar und sei (f_n) eine Folge von Treppenfunktionen, die (1.13) erfüllt. Wir definieren

$$g_n(s) := \begin{cases} f_n(s)\,, & \text{falls } \|f_n(s)\| \le \frac{3}{2}\|f(s)\|\,, \\ 0\,, & \text{falls } \|f_n(s)\| > \frac{3}{2}\|f(s)\|\,. \end{cases}$$

Offensichtlich sind auch g_n, $n \in \mathbb{N}$, Treppenfunktionen. Außerdem haben wir