Also ist y im Punkt x_0 Fréchet–differenzierbar, und es gilt nach Definition der Fréchet–Ableitung:

$$y'(x_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right).$$

■

Wenn man die Gleichung

$$f(g(y)) = y$$

nach g auflöst, bestimmt man die Inverse von f, d.h.

$$g(y) = f^{-1}(y)\,.$$

Unter welchen Bedingungen dies möglich ist, zeigt

2.16 Satz (Satz über die inverse Funktion). *Seien X, Y Banachräume und sei $U(x_0) \subseteq X$ eine offene Umgebung von $x_0 \in X$ und $f\colon U(x_0) \to Y$. Die Fréchet–Ableitung f' existiere in $U(x_0)$, f und f' seien im Punkt x_0 stetig und $f'(x_0)\colon X \to Y$ sei ein Homöomorphismus. Dann ist f ein lokaler Homöomorphismus einer Umgebung $V(x_0)$ auf eine Umgebung $W(f(x_0))$ und die inverse Abbildung f^{-1} ist Lipschitz–stetig. Darüber hinaus gilt: Wenn $\|y - f(x_0)\|$ hinreichend klein ist und $y \in W(f(x_0))$, so konvergiert die Folge (x_n) mit*

$$x_{n+1} = x_n + \big(f'(x_0)\big)^{-1}(y - f(x_n))$$

gegen die eindeutige Lösung von $f(x) = y$.

Beweis. Wir setzen $y_0 := f(x_0)$. Zu $y \in Y$ suchen wir $h \in X$ mit

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = y - y_0\,.$$

Diese Gleichung ist nach der Definition der Fréchet–Ableitung äquivalent zu

$$f'(x_0)h + R(x_0, h) = y - y_0\,, \tag{2.17}$$

wobei

$$R(x_0, h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(\|h\|)\,.$$

Wir definieren nun die Abbildung $A := A_y\colon B_\varepsilon(0) \subseteq X \to X$ durch

$$Ah \equiv (f'(x_0))^{-1}\,(y - y_0 - R(x_0, h))\,.$$

Die Gleichung (2.17) ist äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$Ah = h\,, \tag{2.18}$$

was man sieht, wenn man $\big(f'(x_0)\big)^{-1}$ auf (2.17) anwendet. Dies ist möglich, da $f'(x_0)$ ein Homöomorphismus ist. Zum Beweis der Existenz des Fixpunktes von (2.18) wollen wir den Banachschen Fixpunktsatz benutzen und zeigen deshalb zunächst die k–Kontraktivität von A. Für $h_1, h_2 \in B_\varepsilon(0)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0)(Ah_1 - Ah_2) &= R(x_0, h_2) - R(x_0, h_1) \\
&= f(x_0 + h_2) - f(x_0 + h_1) - f'(x_0)(h_2 - h_1) \\
&= \int_0^1 \big(f'(x_0 + \tau h_2 + (1-\tau)h_1) - f'(x_0)\big)(h_2 - h_1)\, d\tau\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Definition von $R(x_0, h)$ und den Mittelwertsatz benutzt haben. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\|Ah_1 - Ah_2\| \\
&\le \|\,(f'(x_0))^{-1}\,\|\,\|h_1 - h_2\| \int_0^1 \|f'(x_0 + h_1 + \tau(h_2 - h_1)) - f'(x_0)\|\, d\tau \\
&\le k\,\|h_1 - h_2\|
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

mit einem $k \in (0,1)$ für genügend kleines ε, da f' stetig in x_0 ist. Also ist A k–kontraktiv. Weiter gilt für $h \in B_\varepsilon(0)$:

$$
\begin{aligned}
\|Ah\| &\le \|Ah - A0\| + \|A0\| \\
&\le k\,\|h\| + \|\,(f'(x_0))^{-1}\,(y - y_0)\| \\
&\le \varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

falls $\|y - y_0\|$ klein genug ist, d.h. A bildet $B_\varepsilon(0)$ in sich selbst ab. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert also für eine kleine Umgebung $W(y_0)$ von y_0:

$$
\forall\, y \in W(y_0) \quad \exists!\, h_0 \in B_\varepsilon(0): \quad A_y h_0 = h_0\,.
$$

Aufgrund obiger Überlegung ist dies äquivalent zu folgender Aussage: Für alle y aus einer Umgebung $W(y_0)$ von y_0 existiert genau ein $h_0 \in B_\varepsilon(0)$ mit

$$
f(x_0 + h_0) = y\,,
$$

d.h. die inverse Abbildung $f^{-1}\colon W(y_0) \to V(x_0)\colon y \to x_0 + h_0$ existiert. Weiter können wir zeigen, dass diese Abbildung Lipschitz–stetig ist. Seien $y_1, y_2 \in B_\varepsilon(y_0)$ und seien h_1, h_2 die zugehörigen Lösungen der Gleichung (2.17). Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\|h_1 - h_2\| \\
&= \|A_{y_1} h_1 - A_{y_2} h_2\| \\
&\le \|A_{y_1} h_1 - A_{y_1} h_2\| + \|A_{y_1} h_2 - A_{y_2} h_2\| \\
&\le k\,\|h_1 - h_2\| + \|\,(f'(x_0))^{-1}\,(y_1 - y_0 - R(x_0, h_2) - y_2 + y_0 + R(x_0, h_2))\| \\
&\le k\,\|h_1 - h_2\| + \|\,(f'(x_0))^{-1}\,(y_1 - y_2)\|\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir die k–Kontraktivität von A_{y_1} (vgl. (2.19)) und die Definition von A_{y_2} benutzt haben. Auflösen nach $\|h_1 - h_2\|$ ergibt:

$$\|h_1 - h_2\| \le \frac{1}{1-k} \| \left(f'(x_0)\right)^{-1} \| \, \|y_1 - y_2\| \,.$$

Damit haben wir gezeigt, dass f^{-1} Lipschitz–stetig ist, denn

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| = \|h_1 + x_0 - (h_2 + x_0)\| \le K\|y_1 - y_2\| \,.$$

Aus dem Banachschen Fixpunktsatzes folgt, dass die Iterationsvorschrift

$$h_0 = 0 \,, \qquad h_{n+1} = Ah_n \,,$$

gegen den eindeutigen Fixpunkt von A konvergiert. Also konvergiert auch die Folge

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &:= x_0 + h_{n+1} \\
&= x_0 + Ah_n \\
&= x_0 + \left(f'(x_0)\right)^{-1} \left(y - f(x_0) - R(x_0, h_n)\right) \\
&= x_0 + \left(f'(x_0)\right)^{-1} \big(y - f(x_0) - (f(x_0 + h_n) - f(x_0) - f'(x_0)h_n)\big) \\
&= x_0 + h_n + \left(f'(x_0)\right)^{-1} \left(y - f(x_0 + h_n)\right) \\
&= x_n + \left(f'(x_0)\right)^{-1} \left(y - f(x_n)\right)
\end{aligned}$$

gegen die eindeutige Lösung von $f(x) = y$. ∎

2.20 Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.16 ist f^{-1} Fréchet–differenzierbar, und es gilt:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1} \,.$$

Beweis. Sei $f(x_0) = y_0$, $f(x_0 + h) = y_0 + w$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(y_0 + w) - f^{-1}(y_0) - \left(f'(x_0)\right)^{-1} w \\
&= x_0 + h - x_0 - f'(x_0)^{-1} w \\
&= h - f'(x_0)^{-1}(f(x_0 + h) - f(x_0)) \\
&= -f'(x_0)^{-1} \left(f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\right) \\
&= o(\|h\|) \,,
\end{aligned}$$

da f an der Stelle x_0 Fréchet–differenzierbar ist. Weiter gilt:

$$\|h\| = \|x_0 + h - x_0\| = \|f^{-1}(y_0 + w) - f^{-1}(y_0)\| \le c\,\|w\| \,,$$

wobei c die Lipschitz–Konstante von f^{-1} ist. Somit haben wir

$$f^{-1}(y_0 + w) - f^{-1}(y_0) - \big(f'(x_0)\big)^{-1} w = o(\|h\|) = o(\|w\|) \,,$$

d.h. f^{-1} ist an der Stelle y_0 Fréchet–differenzierbar mit der Ableitung $\big(f'(x_0)\big)^{-1}$. ∎

3 Die Theorie monotoner Operatoren

In diesem Kapitel wollen wir folgendes elementare Resultat verallgemeinern:

Die Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle folgende Bedingungen:

(a) *F ist monoton wachsend,*

(b) *F ist stetig,*

(c) *$F(u)$ ist koerziv, d.h. $F(u) \to \pm\infty$ falls $u \to \pm\infty$.*

Dann besitzt die Gleichung

$$F(u) = b$$

für alle $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in \mathbb{R}$.

Falls F strikt monoton ist, so ist die Lösung u eindeutig bestimmt. Dieser klassische Existenzsatz folgt aus dem Mittelwertsatz für stetige Funktionen.

Die *Theorie monotoner Operatoren* verallgemeinert diese Resultat auf Gleichungen in einem reflexiven Banachraum X der Form

$$Au = b\,. \tag{0.1}$$

Diese Theorie benutzt einige grundlegende Prinzipien und Tricks, die wir jetzt kurz veranschaulichen wollen. Da man sich hierbei leicht in technischen Details verlieren kann, gehen wir vorerst nicht auf Details ein.

Angenommen

(a) *der Operator $A: X \to X^*$ ist **monoton** auf dem separablen, reflexiblen Banachraum X, d.h. für alle $u, v \in X$ gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X \geq 0\,,$$

(b) *A ist **hemistetig**, d.h. die Abbildung*

$$t \to \langle A(u - tv), w \rangle_X$$

ist stetig in $[0, 1]$, für alle $u, v, w \in X$,

(c) *A ist **koerziv**, d.h.*

$$\lim_{\|u\|_X\to\infty}\frac{\langle Au,u\rangle_X}{\|u\|_X}=\infty\,,$$

dann besagt der Hauptsatz über monotone Operatoren, dass A surjektiv ist, d.h.

$$\forall\, b\in X^* \quad \exists\, u\in X: \qquad Au=b\,.$$

Der Beweis besteht aus folgenden Hauptschritten:

1. *Galerkin–Approximation*: Da X separabel ist, gibt es eine Basis $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von X, d.h.

$$X_n=\operatorname{span}\{w_1,\dots,w_n\}\,,\qquad X=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n}\,.$$

Wir approximieren (0.1) durch Probleme in X_n, $\dim X_n<\infty$. Auf diese Probleme ist der Satz von Brouwer anwendbar, der die Existenz einer Lösung u_n für jedes dieser Probleme sichert.

2. *Apriori Schranken*: Wir zeigen dann, dass die Folge der Lösungen (u_n) beschränkt ist. Dies geschieht auf Grundlage folgenden Arguments: Wenn $A:X\to X^*$ koerziv ist, dann existiert ein $R>0$ mit

$$\begin{aligned}\langle Au,u\rangle_X &\ge (1+2\|b\|_{X^*})\|u\|_X && \forall u:\|u\|_X>R\\ \Rightarrow \langle Au,u\rangle_X-\langle b,u\rangle_X &\ge (1+2\|b\|_{X^*})\|u\|_X-\|b\|_{X^*}\|u\|_X\\ \Leftrightarrow \langle Au,u\rangle_X-\langle b,u\rangle_X &\ge (1+\|b\|_{X^*})\|u\|_X\\ &\ge (1+\|b\|_{X^*})R && \forall u:\|u\|_X>R.\end{aligned}$$

Falls $u\in X$, mit $\|u\|_X>R$, eine Lösung von $Au=b$ ist, dann gilt aufgrund dieser Rechnung:

$$0\ge(1+\|b\|_{X^*})R>0\,.$$

Dies ist aber ein Widerspruch. Daher erhalten wir, dass jede Lösung u von $Au=b$ die apriori Abschätzung $\|u\|_X<R$ erfüllen muss.

3. *Schwache Konvergenz*: Da X ein reflexiver Banachraum ist, folgt aus dem Satz von Eberlein–Šmuljan, dass es in der beschränkten Folge (u_n) eine Teilfolge (u_{n_k}) gibt mit $u_{n_k}\rightharpoonup u$ schwach in X $(k\to\infty)$.

4. *Existenz einer Lösung*: Das so gefundene u ist eine Lösung von $Au=b$. Diese Aussage beweisen wir mithilfe des folgenden *Minty–Tricks*.

0.2 Lemma (Minty, 1962). *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und sei $A\colon X \to X^*$ ein hemistetiger monotoner Operator. Dann gilt:*

(i) *Der Operator A ist maximal monoton, d.h. seien $u \in X$, $b \in X^*$ gegeben so, dass*
$$\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \qquad \forall\, v \in X\,,$$
dann folgt $Au = b$.

(ii) *A genügt der Bedingung (M), d.h. aus*
$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } X && (n \to \infty)\,,\\ Au_n &\rightharpoonup b && \text{in } X^* && (n \to \infty)\,,\\ \langle Au_n, u_n\rangle &\to \langle b, u\rangle && && (n \to \infty)\,,\end{aligned}$$
folgt $Au = b$.

(iii) *Aus*
$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ in } X\,, \quad Au_n \to b \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)\,,$$
oder alternativ
$$u_n \to u \ \text{ in } X\,, \quad Au_n \rightharpoonup b \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)$$
folgt $Au = b$.

Beweis. 1. Seien $u \in X$ und $b \in X^*$ gegeben, so dass die obige Annahme erüllt ist. Für beliebige $w \in X$ setzen wir $v = u - tw$, $t > 0$ und erhalten aufgrund der Voraussetzung folgende Implikation:
$$\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle b - A(u - tw), w\rangle \geq 0\,.$$
Da A hemistetig ist, folgt durch den Grenzübergang $t \to 0$, dass für alle $w \in X$ gilt:
$$\langle b - Au, w\rangle \geq 0\,.$$
Wir ersetzen w durch $-w$ und erhalten die umgekehrte Ungleichung. Insgesamt gilt also $\langle b - Au, w\rangle = 0$ für alle $w \in X$, d.h. $b = Au$ aufgrund des Satzes von Hahn–Banach.

2. Da A monoton ist, folgt für alle $v \in X$, $n \in \mathbb{N}$
$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle = \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle - \langle Au_n - Av, v\rangle\,.$$
Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich aufgrund der Voraussetzungen für alle $v \in X$
$$0 \leq \langle b, u\rangle - \langle Av, u\rangle - \langle b - Av, v\rangle = \langle b - Av, u - v\rangle\,.$$
Da aber A aufgrund von (i) maximal monoton ist, folgt daher $Au = b$.

3. Die Behauptung ist eine Konsequenz von (ii), wenn wir wissen, dass aus

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ in } X\,, \qquad f_n \to f \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)$$

folgt, dass

$$\langle f_n, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle \quad (n \to \infty)\,.$$

Mit dieser Aussage erhalten wir $\langle Au_n, u_n \rangle \to \langle b, u \rangle$, $(n \to \infty)$. Die Aussage (ii) des folgenden Lemmas liefert aber die benötigte Aussage. ■

0.3 Lemma (Konvergenzprinzipien). *Sei X ein Banachraum. Dann gilt:*

(i) *Wenn $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X, $(n \to \infty)$, dann gibt es ein Konstante c so, dass $\|x_n\|_X \leq c$.*

(ii) *Wenn*

$$\begin{aligned} x_n &\rightharpoonup x \quad \text{in } X \qquad (n \to \infty)\,, \\ f_n &\to f \quad \text{in } X^* \qquad (n \to \infty)\,, \end{aligned}$$

dann folgt

$$\langle f_n, x_n \rangle_X \to \langle f, x \rangle_X \quad (n \to \infty)\,.$$

(iii) *Sei X zusätzlich reflexiv. Die Folge (x_n) sei beschränkt. Wenn alle konvergenten Teilfolgen von (x_n) gegen denselben Grenzwert x schwach konvergieren, dann konvergiert die gesamte Folge (x_n) schwach gegen x.*

Beweis. 1. Dies ist eine Konsequenz aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Für alle $f \in X^*$ ist die Folge $\big(\langle f, x_n \rangle\big)$ beschränkt, da aufgrund der schwachen Konvergenz von (x_n) die Folge reeller Zahlen $\langle f, x_n \rangle$ gegen $\langle f, x \rangle$ konvergiert. Somit haben wir

$$\sup_n |\langle f, x_n \rangle| \leq c(f)\,. \tag{0.4}$$

Mithilfe der *kanonische Isometrie* $J \colon X \to X^{**}$, die gegeben ist durch

$$\langle Jx, f \rangle_{X^{**}} = \langle f, x \rangle_X\,,$$

folgt somit aus (0.4), dass die Folge $(Jx_n) \subset X^{**}$ punktweise beschränkt ist. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit liefert also

$$\sup_n \|Jx_n\|_{X^{**}} \leq c\,,$$

da aber $\|Jx_n\|_{X^{**}} = \|x_n\|_X$ gilt, ist die Behauptung bewiesen.

2. Es gilt:

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| &\leq |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n - x \rangle| \\ &= |\langle f_n - f, x_n \rangle| + \langle f, x_n - x \rangle| \\ &\leq \|x_n\|\, \|f_n - f\| + |\langle f, x_n - x \rangle|\,. \end{aligned}$$

Nun haben wir aufgrund der Voraussetzungen $\|f_n - f\| \to 0$, $(n \to \infty)$,

$|\langle f, x_n - x\rangle| \to 0$, $(n \to \infty)$, sowie $\|x_n\| \leq c$ nach (i). Demzufolge erhalten wir $|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0$, $(n \to \infty)$.

3. Beweis durch Widerspruch. Konvergiere (x_n) nicht schwach gegen x, d.h.

$$\exists\, f \in X^*, \exists\, \varepsilon > 0, \exists\, (x_{n_k}) : \quad |\langle f, x_{n_k}\rangle - \langle f, x\rangle| \geq \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Aber nach Voraussetzung ist die Teilfolge (x_{n_k}) beschränkt. Daher gibt es nach dem Satz von Eberlein–Šmuljan eine Teilfolge $(x_{n_{k'}})$, die schwach konvergiert und zwar nach Voraussetzung gegen x. Dies ist ein Widerspruch. Also gilt die Behauptung. ■

- Die Aussage von Lemma 0.3 (ii) gilt auch für den Fall:

$$\begin{aligned} x_n &\to x \quad \text{in } X \qquad (n \to \infty)\,, \\ f_n &\rightharpoonup f \quad \text{in } X^* \qquad (n \to \infty)\,, \end{aligned}$$

dann folgt

$$\langle f_n, x_n\rangle_X \to \langle f, x\rangle_X \quad (n \to \infty)\,.$$

Der Beweis funktioniert analog zum Beweis von Lemma 0.3 (ii).

3.1 Monotone Operatoren

1.1 Definition. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und sei*

$$A \colon X \to X^* \tag{1.2}$$

ein Operator. Dann heißt A

(i) **monoton** *genau dann, wenn für alle $u, v \in X$ gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X \geq 0\,.$$

(ii) **strikt monoton** *genau dann, wenn für alle $u, v \in X, u \neq v$ gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X > 0\,.$$

(iii) **stark monoton** *genau dann, wenn es ein $c > 0$ gibt so, dass für alle $u, v \in X$ gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X \geq c\, \|u - v\|_X^2\,.$$

(iv) **koerziv** *genau dann, wenn*

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle_X}{\|u\|_X} = \infty\,.$$

• Offensichtlich gelten folgende Implikationen:

A ist stark monoton $\Rightarrow$ A ist strikt monoton $\Rightarrow$ A ist monoton.

• Wenn A stark monoton ist, dann ist A auch koerziv. In der Tat haben wir

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &= \langle Au - A(0), u\rangle + \langle A(0), u\rangle \\ &\geq c\,\|u\|^2 - \|A(0)\|_{X^*}\|u\|\,.\end{aligned}$$

Also folgt:

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} \geq c\,\|u\| - \|A(0)\|_{X^*} \to \infty \qquad \text{für } \|u\| \to \infty\,.$$

Beispiele. 1. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion f als Operator von X nach X^* mit $X = \mathbb{R} = X^*$. In $\mathbb{R}$ ist das Dualitätsprodukt gerade die Multiplikation, d.h.

$$\langle f(u) - f(v), u - v\rangle = \big(f(u) - f(v)\big)(u - v)\,.$$

Somit haben wir folgende Aussagen:

(i) $f : X \to X^*$ (strikt) monoton $\Leftrightarrow$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (strikt) monoton.

(ii) f koerziv $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{u\to\pm\infty} f(u) = \pm\infty$.

2. Wir betrachten nun die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(u) = \begin{cases} |u|^{p-2}u & \text{für } u \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } u = 0\,. \end{cases}$$

Für g gelten folgende Aussagen:

(i) Für $p > 1$ ist g strikt monoton.

(ii) Für $p = 2$ ist g stark monoton.

(iii) Für $p \geq 2$ gilt:

$$\langle g(u) - g(v), u - v\rangle \geq c\,|u - v|^p\,.$$

1.3 Definition. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und $A\colon X \to X^*$ ein Operator. Dann heißt A:*

(i) ***demistetig*** *genau dann, wenn*

$$u_n \to u \text{ in } X \quad (n \to \infty) \qquad \Rightarrow \qquad Au_n \rightharpoonup Au \text{ in } X^* \quad (n \to \infty).$$

(ii) ***hemistetig*** *genau dann, wenn für alle $u, v, w \in X$ die Funktion*

$$t \to \langle A(u + tv), w\rangle$$

in $[0, 1]$ stetig ist.