*Beweis.* 1. Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit $u_n \rightharpoonup u$, $(n \to \infty)$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0$. Da $A$ monoton ist, gilt:

$$\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \ge 0\,,$$

woraus folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \ge \liminf_{n\to\infty} \langle Au, u_n - u\rangle = 0\,.$$

Zusammen erhalten wir also

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle = 0\,. \tag{2.6}$$

Für beliebige $w \in X$ setzen wir $z = u + t(w-u)$, $t > 0$. Die Monotonie von $A$ impliziert

$$\langle Au_n - Az, u_n - (u + t(w-u))\rangle \ge 0\,,$$

was äquivalent zu

$$t\langle Au_n, u - w\rangle \ge \langle -Au_n, u_n - u\rangle + \langle Az, u_n - u\rangle + t\langle Az, u - w\rangle$$

ist. Somit erhalten wir für alle $w \in X$:

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \ge \langle Az, u - w\rangle\,,$$

wobei wir (2.6) und $u_n \rightharpoonup u$, $(n \to \infty)$, sowie $t > 0$ benutzt haben. Nun verwenden wir die Hemistetigkeit des Operators $A$ und erhalten für $t \to 0^+$, dass $Az \rightharpoonup Au$ und deshalb für alle $w \in X$

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \ge \langle Au, u - w\rangle\,,$$

d.h. $A$ ist pseudomonoton.

2. Sei $(u_n) \subseteq X$ eine Folge mit $u_n \rightharpoonup u$, $(n \to \infty)$. Dann gilt $Au_n \to Au$, $(n \to \infty)$, aufgrund der starken Stetigkeit von $A$. Somit gilt für alle $w \in X$ nach Lemma 0.3 (ii)

$$\langle Au, u - w\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle\,.$$

3. Wir wählen eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit $u_n \rightharpoonup u$, $(n \to \infty)$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - u\rangle \le 0\,. \tag{2.7}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle &\le 0\,,\\ \limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle &\le 0\,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

was wir durch Widerspruch beweisen. Sei $(u_{n_k})$ eine Teilfolge von $(u_n)$ so, dass

$$\limsup_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle = a > 0\,.$$

Aus (2.7) folgt dann

$$\limsup_{k\to\infty} \langle Bu_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle \le -a\,.$$

Da $B$ pseudomonoton ist, gilt für alle $w \in X$

$$\langle Bu, u - w\rangle \le \liminf_{k\to\infty} \langle Bu_{n_k}, u_{n_k} - w\rangle\,.$$

Für $w = u$ erhalten wir aber $0 \le -a < 0$, was ein Widerspruch ist. Also gilt (2.8) und liefert mit der Pseudomontonie von $A$ und $B$

$$\begin{aligned}\langle Au, u - w\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle,\\ \langle Bu, u - w\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - w\rangle\,.\end{aligned}$$

Addieren wir beide Ungleichungen ergibt sich für alle $w \in X$

$$\langle Au + Bu, u - w\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - w\rangle\,,$$

d.h. $A + B$ ist pseudomonoton.

4. Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit

$$u_n \rightharpoonup u\,, \quad Au_n \rightharpoonup b \quad (n \to \infty), \qquad \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \le \langle b, u\rangle\,.$$

Dies impliziert $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0$. Da $A$ pseudomonoton ist, folgt daher für alle $w \in X$

$$\begin{aligned}\langle Au, u - w\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle\\ &\le \langle b, u\rangle - \langle b, w\rangle = \langle b, u - w\rangle\end{aligned}$$

Wir ersetzen $w$ durch $2u - w$ und erhalten für alle $w \in X$:

$$\langle Au, u - w\rangle = \langle b, u - w\rangle\,,$$

und somit $Au = b$.

5. Sei $(u_n) \subseteq X$ sei eine Folge mit $u_n \to u$, $(n \to \infty)$. Da $A$ lokal beschränkt ist, ist die Folge $(Au_n)$ beschränkt. $X$ ist reflexiv und daher gibt es eine Teilfolge $(Au_{n_k})$ mit $Au_{n_k} \rightharpoonup b, (k \to \infty)$, und wir erhalten $\lim\limits_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle = 0$. Die Pseudomonotonie von $A$ impliziert

$$
\begin{aligned}
\langle Au, u-w\rangle &\le \liminf_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k}-w\rangle \\
&= \langle b, u-w\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Damit folgt wie in 4. $Au = b$, d.h. $Au_{n_k} \rightharpoonup Au, (k\to\infty)$. Das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iii) liefert, da obige Argumentation für beliebige konvergente Teilfolgen gilt,

$$
Au_n \rightharpoonup b = Au \quad (n\to\infty)\,,
$$

d.h. $A$ ist demistetig. ■

**2.9 Satz (Brezis, 1968).** *Sei $A\colon X\to X^*$ ein pseudomonotoner, beschränkter und koerziver Operator, wobei $X$ ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum ist. Dann existiert für alle $b\in X^*$ eine Lösung $u\in X$ von*

$$
Au = b\,. \tag{2.10}
$$

*Beweis.* Nach Lemma 2.5 (v) ist $A$ demistetig, da $A$ pseudomonoton und beschränkt ist; nach Lemma 2.5 (iv) genügt $A$ der Bedingung $(M)$, da $A$ pseudomonoton ist. Sei $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $X$. Wir verwenden nun das Galerkin–Verfahren genauso wie im Beweis von Satz 1.5, d.h. wir suchen

$$
u_n = \sum_{k=1}^n c_k^n w_k\,,
$$

die das Gleichungssystem

$$
g_k(c_k^n) = g_k(u_n) := \langle Au_n - b, w_k\rangle = 0\,, \qquad k = 1,\dots,n \tag{2.11}
$$

lösen. Die Lösbarkeit diese Gleichungssystemes folgt wie im Beweis des Satzes von Browder, Minty (Satz 1.5), da $A$ demistetig und koerziv ist. Die Demistetigkeit von $A$ impliziert nämlich, dass die $g_k, k=1,\dots,n$, stetig sind, und die Koerzivität von $A$, dass $\sum g_k(c_k^n)c_k^n > 0$ für alle $\|u_n\| = R$ (cf. (1.11)). Außerdem erhalten wir aus der Koerzivität auch eine apriori Schranke (cf. (1.12)), d.h.

$$
\|u_n\|_X \le R \qquad\qquad \forall n\in\mathbb{N}\,.
$$

Also gibt es eine konvergente Teilfolge $(u_{n_k})$ mit $u_{n_k}\rightharpoonup u, (k\to\infty)$. Wir wollen nun zeigen, dass $u$ (2.10) löst. Aus den Gleichungen der Galerkin–Approximation (2.11) folgt, dass

$$
\lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k} - b, v\rangle = 0 \qquad \forall v\in \operatorname{span}\{w_1,\dots\}\,.
$$

Die Beschränktheit von $A$ liefert, dass die Folge $(Au_{n_k})$ beschränkt ist und einen schwachen Limes besitzt, d.h.

$$
Au_{n_k} \rightharpoonup c\,, \qquad (k\to\infty)\,.
$$

Es gilt aber $c = b$ mit denselben Argumenten wie im Beweisteil 3. von Satz 1.5. Aus dem Galerkin–System mit $w = u_{n_k}$ und der schwachen Konvergenz der $(u_{n_k})$ erhalten wir

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \langle b, u_{n_k}\rangle \to \langle b, u\rangle\,, \qquad (k \to \infty)\,.$$

Daher sind die Voraussetzung für die Bedingung $(M)$ erfüllt, und es folgt

$$Au = b\,.$$

■

### 3.2.2 Quasilineare elliptische Gleichungen II

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f \qquad \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ ist und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Wir setzen $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ und definieren folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} \langle A_1 u, \varphi\rangle &:= \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\, dx\,,\\ \langle A_2 u, \varphi\rangle &:= \int\limits_\Omega g(u)\varphi\, dx\,,\\ \langle b, \varphi\rangle &:= \int\limits_\Omega f\varphi\, dx\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Wir gehen analog zum Abschnitt 3.1 vor. Dort wurden bereits der Operator $A_1$ (cf. Lemmata 1.27, 1.29 mit $s = 0$) und das Funktional $b$ behandelt. Bezüglich des Operators $A_2$ haben wir

**2.13 Lemma.** *Sei $\Omega$ ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. An die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stellen wir folgende Wachstumsbedingung:*

$$|g(s)| \le c(1 + |s|^{r-1})\,, \tag{2.14}$$

*wobei $1 \le r < \infty$. Für $1 \le p \le n$ und $r \le \frac{np}{n-p}$ bildet der in $(2.12)_2$ definierte Operator $A_2$ den Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ in seinen Dualraum $X^*$ ab und ist beschränkt. Für $r < \frac{np}{n-p}$ ist $A_2$ stark stetig.*

*Beweis.* 1. Aus der Definition von $A_2$ und (2.14) erhalten wir für $q = \frac{np}{n-p}$ und $u, \varphi \in X$

$$\begin{aligned}
|\langle A_2 u, \varphi\rangle| &\le \int_\Omega c\,(1+|u|^{r-1})|\varphi|\,dx \\
&\le c\Big(\int_\Omega (1+|u|^{r-1})^{q'}\,dx\Big)^{\frac{1}{q'}}\Big(\int_\Omega |\varphi|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\le c\Big(1+\Big(\int_\Omega |u|^{(r-1)q'}\,dx\Big)^{\frac{1}{q'}}\Big)\Big(\int_\Omega |\varphi|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\le c\,\big(1+\|u\|^{r-1}_{L^{(r-1)q'}}\big)\|\varphi\|_X,
\end{aligned}$$

da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Somit erhalten wir

$$|\langle A_2 u, \varphi\rangle| \le c\,(1+\|u\|_X^{r-1})\,\|\varphi\|_X\,, \tag{2.15}$$

sofern $(r-1)q' \le q$, denn $X \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^\alpha(\Omega)$ für $q \ge \alpha$. Die Forderung $(r-1)q' \le q$ läßt sich umformen zu $(\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p})$

$$\begin{aligned}
&(r-1)\tfrac{1}{q} \le \tfrac{1}{q'} \\
\Leftrightarrow\ &(r-1)\Big(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{n}\Big) \le \tfrac{1}{q'} = 1-\tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{n} \\
\Leftrightarrow\ &r\Big(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{n}\Big) \le 1 \\
\Leftrightarrow\ &r \le \tfrac{np}{n-p}\,.
\end{aligned}$$

Aus der Definition der Operatornorm folgt

$$\|A_2 u\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|_X\le 1}} |\langle A_2, \varphi\rangle| \le c\,(1+\|u\|_X^{r-1})$$

und demzufolge $A_2 u \in X^*$, d.h. $A_2\colon X \to X^*$. Aus dieser Abschätzung folgt sofort, dass $A_2$ beschränkt ist.

2. Sei $(u_n) \subseteq X$ eine schwach konvergente Folge in $X$, d.h. $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$. Aufgrund der kompakten Einbettung $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega)$, für $r < \frac{np}{n-p}$ gilt also für eine Teilfolge

$$u_{n_k} \to u \qquad \text{in } L^r(\Omega), \quad (k\to\infty)\,. \tag{2.16}$$

Wir setzen

$$F(v) = g(v)$$

und erhalten mit Hilfe der Wachstumsbedingung (2.14) und der Stetigkeit von $g$, dass der Nemyckii Operator $F$ die Voraussetzungen von Lemma 1.19 erfüllt. Da $r-1 = \frac{r}{r'}$ gilt, ist $F : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ stetig, d.h. für die Folge in (2.16) gilt:

$$\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}} \to 0 \qquad (k\to\infty)\,.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|_X\le 1}} |\langle A_2 u_{n_k} - A_2 u, \varphi\rangle| &\le \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|_X\le 1}} \int_\Omega |g(u_{n_k}) - g(u)||\varphi|\,dx \\ &= \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|_X\le 1}} \|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}}\|\varphi\|_{L^r} \to 0\,,\end{aligned}$$

falls $(k \to \infty)$, denn $X \hookrightarrow L^r(\Omega)$ und damit $\|\varphi\|_{L^r} \le c\|\varphi\|_X$. Somit folgt $A_2 u_{n_k} \to Au$ in $X^*$. Da diese Argumentation für alle Teilfolgen, die (2.16) erfüllen gilt, liefert das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iii), dass $A_2$ stark stetig ist, d.h. $A_2 u_n \to A_2 u$ in $X^*$, $(n \to \infty)$. ∎

Um Satz 2.9 anwenden zu können benötigen wir noch folgendes Lemma.

**2.17 Lemma.** *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 2.13 erfülle $g$ die Koerzivitätsbedingung*

$$\inf_{s\in\mathbb{R}} g(s)s > -\infty\,. \tag{2.18}$$

*und es sei $p > 1$. Dann ist der Operator $A = A_1 + A_2 : X \to X^*$ koerziv.*

*Beweis.* Wir haben (cf. Beweis von Lemma 1.29)

$$\langle A_1 u, u\rangle = \|\nabla u\|_{L^p}^p\,.$$

und aufgrund von (2.18) gilt für eine Konstante $c_0 > 0$

$$\langle A_2 u, u\rangle = \int_\Omega g(u)u\,dx > -c_0\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} &= \frac{\langle A_1 u, u\rangle}{\|u\|_X} + \frac{\langle A_2 u, u\rangle}{\|u\|_X} \\ &\ge \frac{\langle A_1 u, u\rangle}{\|\nabla u\|_{L^p}} - \frac{c_0}{\|\nabla u\|_{L^p}} \\ &\ge \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} - \frac{c_0}{\|\nabla u\|_{L^p}} \to \infty \qquad \big(\|\nabla u\|_{L^p} \to \infty\big)\,,\end{aligned}$$

falls $p > 1$. Also ist der Operator $A$ koerziv. ∎

**2.19 Satz.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Sei $1 < p < n$ und die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzungen (2.14) und (2.18), mit $1 \le r < \frac{np}{n-p}$. Dann existiert für alle $f \in L^{p'}(\Omega)$ eine verallgemeinerte Lösung von (2.1), d.h. es gibt ein $u \in W_0^{1,p}(\Omega) = X$ so, dass*

$$(A_1 + A_2)u = b\,.$$

*Beweis.* Wir wollen den Satz von Brezis (Satz 2.9) anwenden. Der Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein reflexiver, separabler Banachraum. Aus den Lemmata 1.27 und 1.29 wissen wir, dass $A_1 : X \to X^*$ ein strikt monotoner und stetiger, also auch beschränkter, Operator ist. Also ist $A_1$ nach Lemma 2.5 (i) pseudomonoton. Nach Lemma 2.13 ist $A_2$ ein stark stetiger, also auch beschränkter, Operator. Lemma 2.5 (ii) besagt, dass somit $A_2$ pseudomonoton ist. Insgesamt ist also $A = A_1 + A_2$ ein beschränkter pseudomonotoner Operator, der nach Lemma 2.17 auch koerziv ist. Lemma 1.27 liefert, dass $b \in X^*$ gilt. Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 2.9. ■

## 3.3 Maximal monotone Operatoren

Die Theorie *maximal monotoner* Operatoren ist das Herzstück in der Theorie monotoner Operatoren, da es die Grundideen zur vollen Entfaltung bringt und sehr allgemein ist. Intuitiv kann man sich unter einem maximal monotonen Operator einen monotonen Operator vorstellen, der *keine echte* monotone Erweiterung besitzt.

**Beispiele.**

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und monoton wachsend, z.B. sei
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ x^2 & \text{für } x \geq 0\,. \end{cases}$$
Eine solche Funktion ist maximal monoton.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monoton wachsend, aber unstetig, z.B. sei
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ x^2 + 2 & \text{für } x \geq 0\,. \end{cases}$$
$f$ ist monoton, aber nicht maximal monoton. Es gibt nämlich eine Erweiterung die monoton ist, z.B.
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ [0,2] & \text{für } x = 0\,, \\ x^2 + 2 & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

Allerdings müssen wir für die maximale Monotonie „bezahlen“, denn wir müssen „mehrdeutige“ Funktionen oder genauer Abbildungen zulassen.

**3.1 Definition.** *Sei $A : M \to 2^Y$ eine* ***Abbildung****, d.h. $A$ ordnet allen $u \in M$ eine Teilmenge $Au \subseteq Y$ zu, d.h. $Au \in 2^Y$. Dann ist*
$$D(A) = \{u \in M \,\big|\, Au \neq \emptyset\}$$
*der* ***effektive Definitionsbereich****, ferner ist*

$$R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au$$

*der **Wertebereich** und*

$$G(A) = \{(u,v) \in M \times Y \,\big|\, u \in D(A), v \in Au\}$$

*der **Graph** von $A$. Wir schreiben für $(u,v) \in G(A)$ einfacher $(u,v) \in A$.*

- Die *inverse Abbildung* $A^{-1}\colon Y \to 2^M$ existiert *immer* und ist definiert durch
$$A^{-1}(v) = \{u \in M \,\big|\, v \in Au\}\,.$$
Offensichtlich gilt $D(A^{-1}) = R(A)$, $R(A^{-1}) = D(A)$ und $(u,v) \in A$ genau dann, wenn $(v,u) \in A^{-1}$.
- Seien $X, Y$ lineare Räume über $\mathbb{K}$ und $M \subseteq X$. Für gegebene Abbildungen $A, B\colon M \to 2^Y$ und für feste $\alpha$, $\beta \in \mathbb{K}$ definieren wir die **Linearkombination**
$$(\alpha A + \beta B)(u) = \begin{cases} \alpha Au + \beta Bu & \text{für } u \in D(A) \cap D(B)\,, \\ \emptyset & \text{sonst}\,. \end{cases}$$
- Jede eindeutige Abbildung $A\colon D(A) \subseteq M \to Y$ kann mit einer mehrdeutigen Abbildung $\bar{A}\colon M \to 2^Y$ identifizert werden, indem wir
$$\bar{A}u = \begin{cases} \{Au\} & \text{für } u \in D(A)\,, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$
setzen. Dann gilt
$$D(\bar{A}) = D(A) \qquad \text{und} \qquad R(\bar{A}) = R(A).$$
Im Folgenden verwenden wir immer diese Identifizierung und schreiben kürzer $A$ statt $\bar{A}$.

**3.2 Definition.** *Sei $X$ ein reeller, reflexiver Banachraum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Abbildung $A\colon M \to 2^{X^*}$ heißt*

(i) ***monoton** genau dann, wenn für alle $(u,u^*), (v,v^*) \in A$ gilt:*
$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle_X \geq 0,$$

(ii) ***maximal monoton** genau dann, wenn $A$ monoton ist, und aus $(u,u^*) \in M \times X^*$ sowie*
$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle_X \geq 0 \qquad \forall (v,v^*) \in A$$
*folgt, dass $(u,u^*) \in A$.*